所作的垂线是三条确定 X 的垂线之一. 但这条垂线就是西姆松线 S_B ，因此点 B 的西姆松线确实经过点 X；类似的，点 A 和点 C 的西姆松线也经过点 X. ■

我们已经证明弦 QR 的垂极点是点 Q 和 R 的西姆松线的交点（参见本章的第2节）. 则类似的，直线 BC 的垂极点在西姆松线 S_B 和 S_C 上（都是关于 $\triangle PQR$），这两条直线我们刚刚看到都经过点 X. 因此点 X 是 BC 的垂极点，而对于 AB 和 AC 来说类似. ■

最后，考虑 PQ 的垂极点的作图. 在图166中，从点 A 和 B 向 PQ 所作的垂线给出垂足 F 和 V，接着从每个垂足分别作 BC 和 AC 的垂线. 但这些垂线恰好是西姆松线 S_A 和 S_B，它们已知相交于里格比点 X. 类似的，S_C 经过点 X. ■

最后，是一个漂亮的习题.

练习

[136] 证明里格比点 X 是联结 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PQR$ 垂心的线段 HK 的中点.

第十二章

关于塞瓦线

1. 塞瓦定理

如第1章所注记的，从三角形一个顶点发出通向对边的线段称为*塞瓦线*(cevian)，以纪念17世纪意大利的工程师乔瓦尼·塞瓦(Giovanni Ceva，1647—1734). 1678年，塞瓦发表了从每个顶点发出一条的三条塞瓦线共点的充要条件. 设这三条塞瓦线分别联结顶点 A, B, C 和对边上的点 D, E, F. 塞瓦定理陈述的是：如果各边被 D，E 和 F 所分成的比的乘积为1，则 AD，BE，CF 共点，反之亦然. 在图172中 AD，BE，CF 共点当且仅当

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=1,$$

即当且仅当

$$ace=bdf.$$

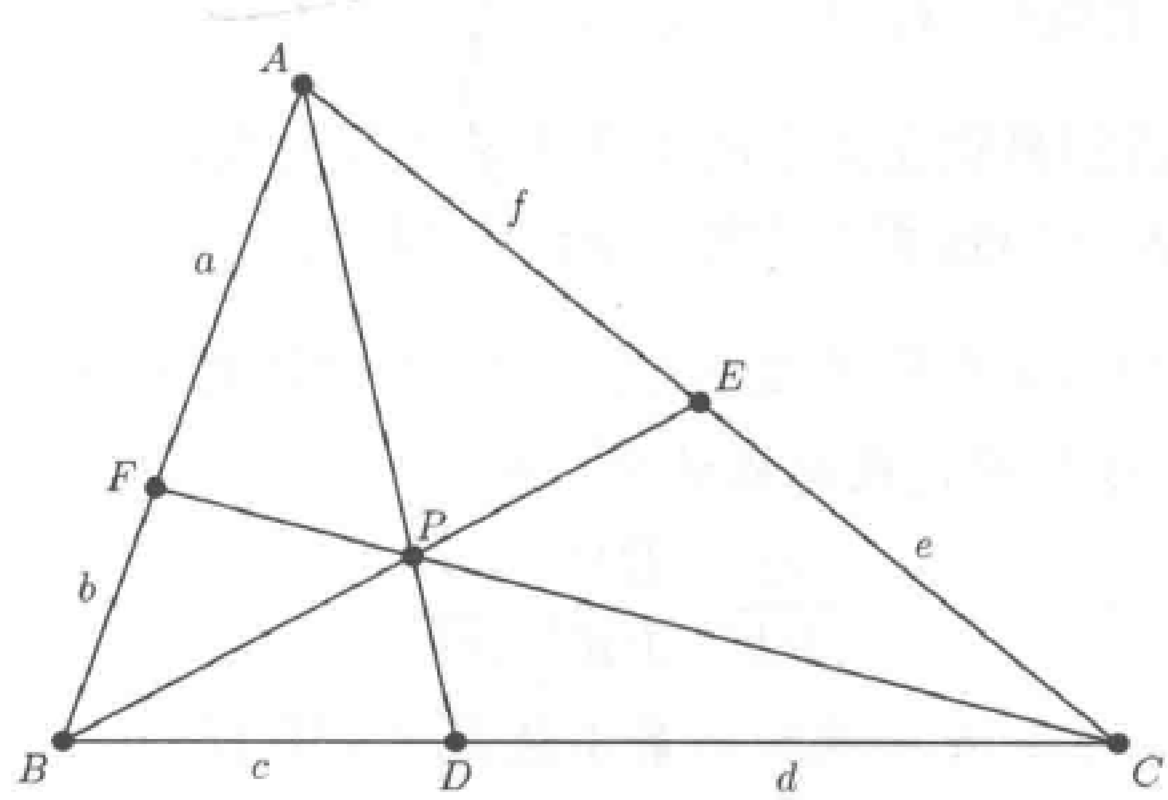


图172

这个定理在许多书中被用各种方法简单地证明过. 我特别喜欢如下的处理方法. [137]

在顶点 A, B 和 C 悬挂上质量 be, ae 和 bf（图 173）. 因为 $a(be) = b(ae)$，所以在点 A 和 B 处的质量关于点 F 的力矩相等，表明这个系统等价于在点 F 有质量 $(be + ae)$ 及在 C 处有质量 bf. 则这个系统的质量重心 G 一定在 CF 上. 类似的，G 在 BE 上. 问题是 G 是否在 AD 上.

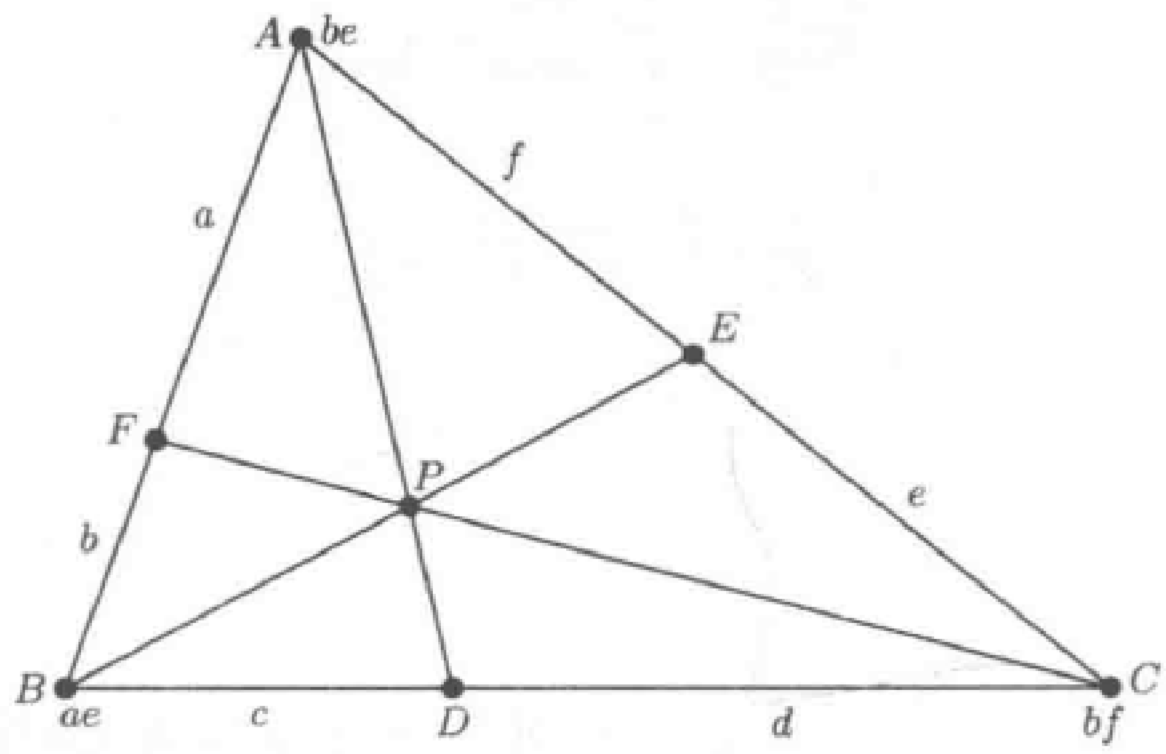


图 173

(a) 设 AD, BE 和 CF 共点于 P. 因为点 G 在 CF 和 BE 上，所以一定是它们的交点 P. 如果点 B 和 C 处质量的质量重心是 BC 上的点 X，则整个系统等价于在 X 和 A 处的一对质量，因而 G 必定出现在线段 AX 上. 这就是说，因为 $G = P$，所以点 X 一定与点 A 和点 P 共线，说明 $X = D$，因此点 B 和 C 处的质量关于点 D 相等的力矩给出要求的 $aec = dbf$.

(b) 设 $aec = dbf$. 我们已经看到，无论如何，质量 G 在 CF 和 BE 中的每一条上. 因为等式 $aec = dbf$ 表明点 D 是点 B 和 C 处质量的质量重心，所以点 G 一定也在 AD上，证明 AD, BE 和 CF 共点. ■

2. 现在，让我们来建立如下两个关于共点塞瓦线的有趣性质，它们是《美国数学月刊》1958 年（421 页）问题 E1043 的题目：

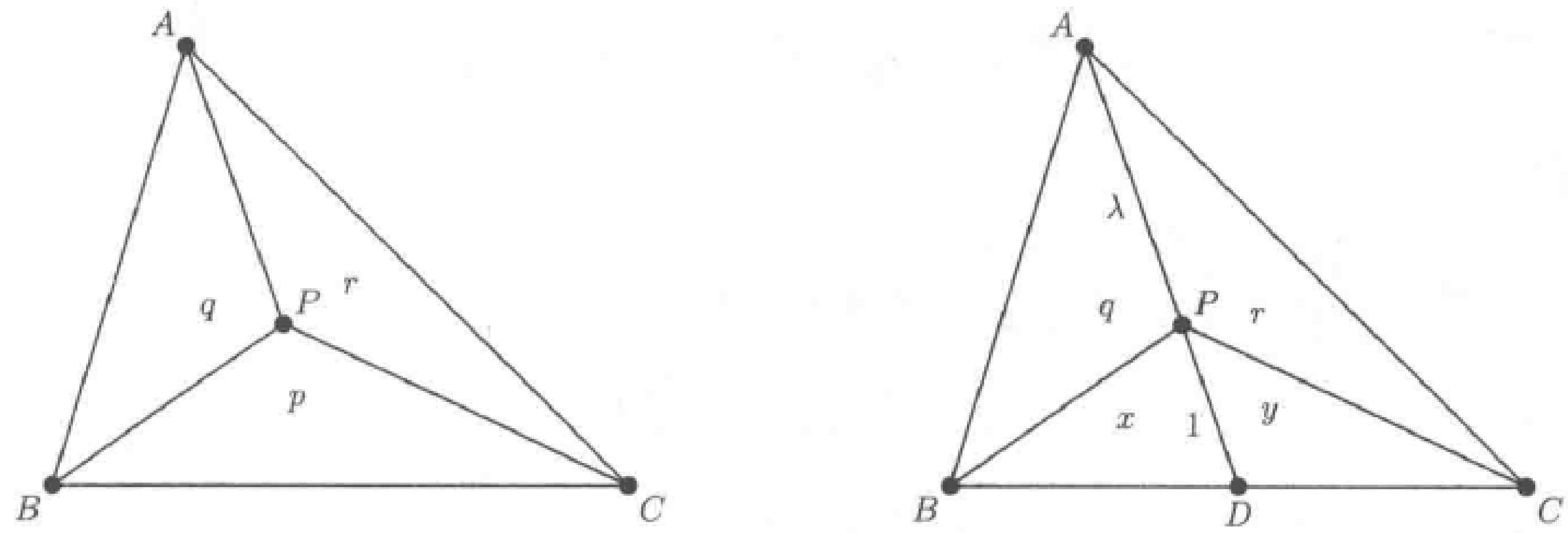
> 如果 AD, BE 和 CF 是经过 $\triangle ABC$ 内部任意一点 P 的塞瓦线，证明点 P 分这些塞瓦线所成的比，即
> $$\frac{AP}{PD}, \frac{BP}{PE}, \frac{CP}{PF},$$
> 它们和的最小值是 6 而乘积的最小值是 8（图 173）.

（这是由华盛顿哥伦比亚特区天主教大学的 O. J. Ramler 提供，并由洛杉矶大学的 Charles W. Trigg 解答的.）
[138]

这个问题可以用塞瓦定里来漂亮地解决，而下面的解答，本质上建立在算术平均－几何平均不等式基础上，特别深刻而迷人（参见几何不等式的权威著

作——O. Bottema 等，*Geometric Inequalities*①，114 和 115 页）.

设 $\triangle ABC$ 被线段 AP，BP 和 CP 分成的三角形的面积是 p，q 和 r（图 174(a)），并设子 $\triangle BPD$ 和 $\triangle DPC$ 的面积分别为 x 和 y（图 174(b)），因此 $x+y=p$.



(a)　　(b)

图 174

另外，设

$$\frac{AP}{PD}=\lambda,\quad 即\ AP=\lambda PD.$$

其次有公共高的三角形的面积 q 和 x 与它们的底成比例. 因此有

$$q=\lambda x\ 及\ r=\lambda y,$$

给出

$$q+r=\lambda(x+y)=\lambda p,$$

以及

$$\lambda=\frac{q+r}{p}.$$

类似的，设

$$\frac{BP}{PE}=\mu,\ \frac{CP}{PF}=\nu,$$

我们得到

$$\mu=\frac{p+q}{r}\ 与\ \nu=\frac{r+p}{q}.$$ [139]

因为对任意的正数 x 和 y，A.M. - G.M. 不等式给出

$$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=1,$$

① 译者注：这本书由单墫先生译为《几何不等式》，北京大学出版社，1991 年 9 月出版.

推出熟知的结论

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2.$$

类似的，有同样熟知的不等式

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}，或\ x+y\geqslant 2\sqrt{xy}.$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{AP}{PD}+\frac{BP}{PE}+\frac{CP}{PF}&=\lambda+\mu+\nu\\&=\frac{q+r}{p}+\frac{p+q}{r}+\frac{r+p}{q}\\&=\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)+\left(\frac{q}{r}+\frac{r}{q}\right)+\left(\frac{r}{p}+\frac{p}{r}\right)\\&\geqslant 2+2+2=6,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{AP}{PD}\cdot\frac{BP}{PE}\cdot\frac{CP}{PF}&=\lambda\cdot\mu\cdot\nu\\&=\frac{q+r}{p}\cdot\frac{p+q}{r}\cdot\frac{r+p}{q}\\&\geqslant\frac{2\sqrt{qr}}{p}\cdot\frac{2\sqrt{pq}}{r}\cdot\frac{2\sqrt{rp}}{q}=8.\ \blacksquare\end{aligned}$$

三个类似的结论是

(a)
$$\frac{AD}{PD}\cdot\frac{BE}{PE}\cdot\frac{CF}{PF}\geqslant 27,$$

(b)
$$\frac{AD}{AP}+\frac{BE}{BP}+\frac{CF}{CP}\geqslant\frac{9}{2},$$

[140] (c)
$$\frac{PD}{AP}+\frac{PE}{BP}+\frac{PF}{CP}\geqslant\frac{3}{2}.$$

最后，我们注意，对于 $k>0$，

$$\frac{\lambda^k+\mu^k+\nu^k}{3}\geqslant(\lambda^k\mu^k\nu^k)^{1/3},$$

又因为$\lambda\mu\nu\geqslant 8$，所以得到 $\lambda^k+\mu^k+\nu^k\geqslant 3\cdot 2^k$.

3. 接下来，让我们考虑四个属于 John Rigby 的有趣的小结论.

我们由一个定义开始：

设 D, E, F 是从 $\triangle ABC$ 的顶点 A, B, C 发出的共点塞瓦线的足(图 175 (a)), 我们称 $\triangle DEF$ 为塞瓦三角形(cevian triangle).

定理 1 如果 $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的一个塞瓦三角形, 则将 D, E 和 F 关于各自所在边的中点进行反射得到的 $\triangle D'E'F'$ 也是一个塞瓦三角形(图 175(b)).

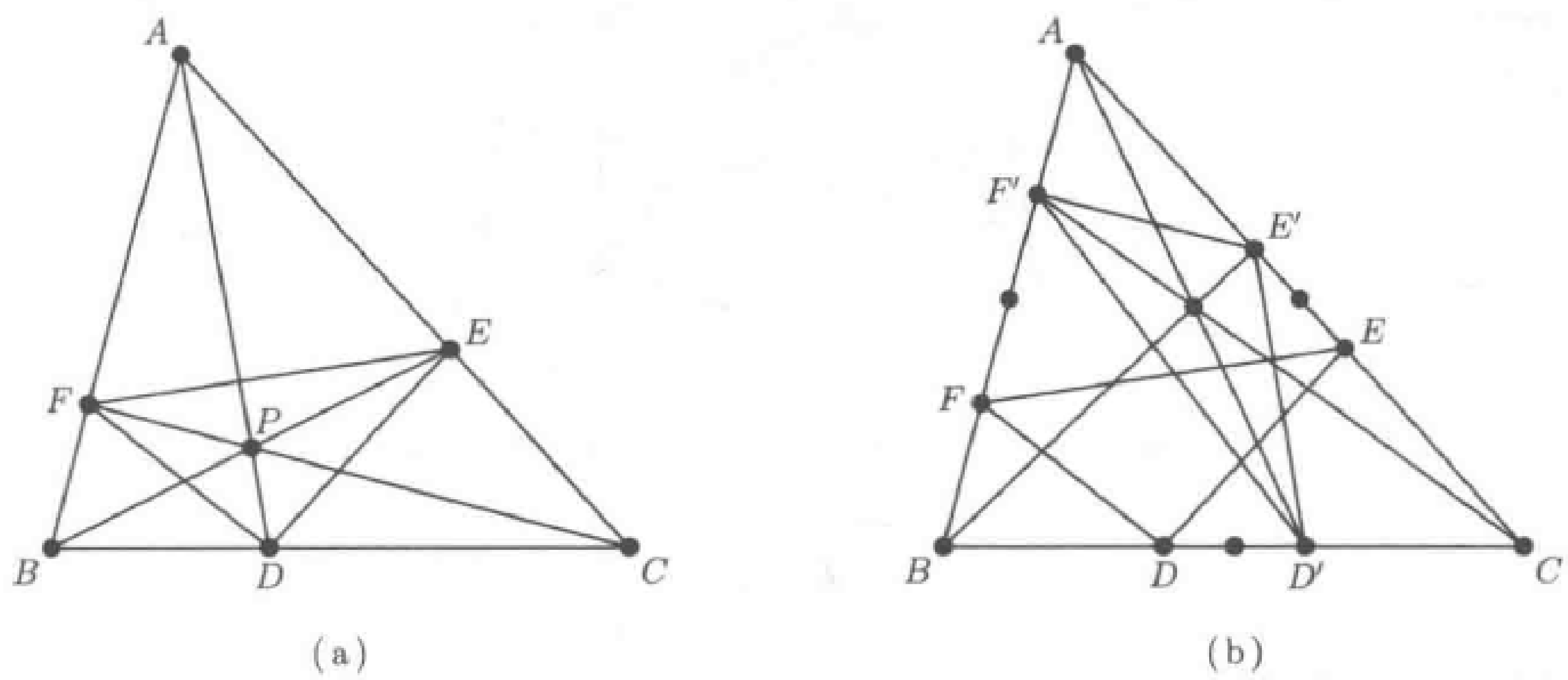


图 175

证明 根据塞瓦定理, $\triangle DEF$ 是塞瓦三角形当且仅当 D, E 和 F 分它们各自所在边所成比的乘积为 1. 因为边上一点关于这边中点的反射只是将这个点分该边的比颠倒, 所以由 D', E' 和 F' 确定的比的乘积是 1 的倒数, 表明 $\triangle D'E'F'$ 确实是一个塞瓦三角形. ■

定理 2 如果 $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的一个塞瓦三角形, 则 $\triangle DEF$ 的外接圆与 $\triangle ABC$ 各边交于另外一个塞瓦三角形的顶点 D', E' 和 F'.

证明 令 x, y, s 和 t 表示各乘积

$$x = AF \cdot BD \cdot CE, \qquad y = FB \cdot DC \cdot EA,$$

$$s = AF' \cdot BD' \cdot CE', \qquad t = F'B \cdot D'C \cdot E'A.$$ [141]

因为 $\triangle DEF$ 是一个塞瓦三角形, 所以 $x = y$. 为了证明 $\triangle D'E'F'$ 是一个塞瓦三角形, 我们需要证明 $s = t$.

如果 D', E', F' 中的某些点出现在边的延长线上, 则下面的论证需要进行少量的调整. 回忆: 从圆外一点引出的所有割线, 整条割线与圆外部分的乘积都是相等的. 对于图 176 中所表示的情形, 从各顶点引出的割线给出

$$AF' \cdot AF = EA \cdot E'A,$$

$$BD' \cdot BD = FB \cdot F'B,$$

$$CE' \cdot CE = DC \cdot D'C.$$

这些乘积给出 $sx = ty$, 又因为 $x = y$, 由此得到 $s = t$. ■

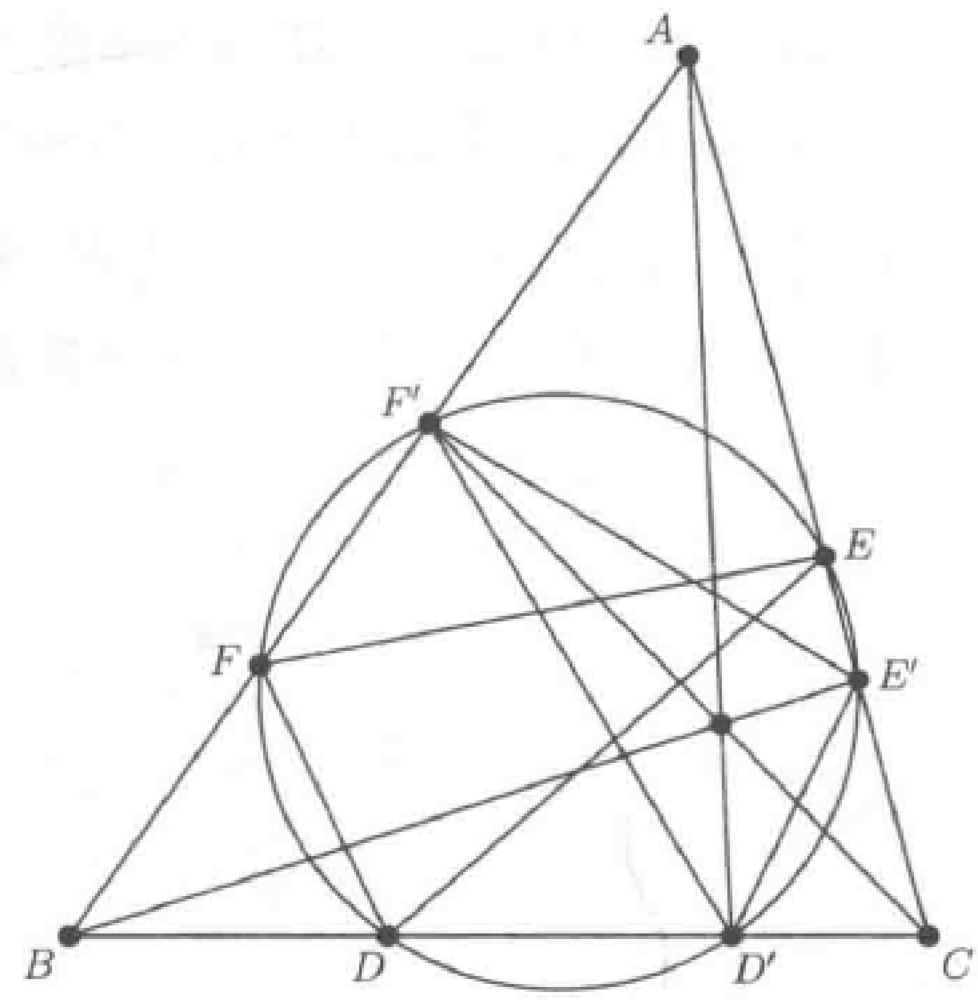


图 176

接下来我们引出第二个定义:

如果点 P 在 $\triangle ABC$ 中的垂足三角形是一个塞瓦三角形, 则点 P 称为垂-塞瓦点(pedal-cevian point), 或者简称为 PC 点.

这样, 举例来说, 三角形的外心 O 总是一个 PC 点, 因为它的垂足三角形的顶点是各边的中点而相关的塞瓦线恰是相交于重心 G 的中线(图 177). 另外, 垂心 H 的垂足三角形的各顶点是各高线(也就是相关的塞瓦线)的垂足, 又因为各高线相交于 H 本身, 所以 H 是一个特殊的自相关的 PC 点. 还记得内心 I 的垂足三角形是 $\triangle ABC$ 的葛尔刚三角形, 而通向它各顶点的塞瓦
[142] 线共点于葛尔刚点(参见第七章). 现在我们容易建立起 PC 点的两个性质.

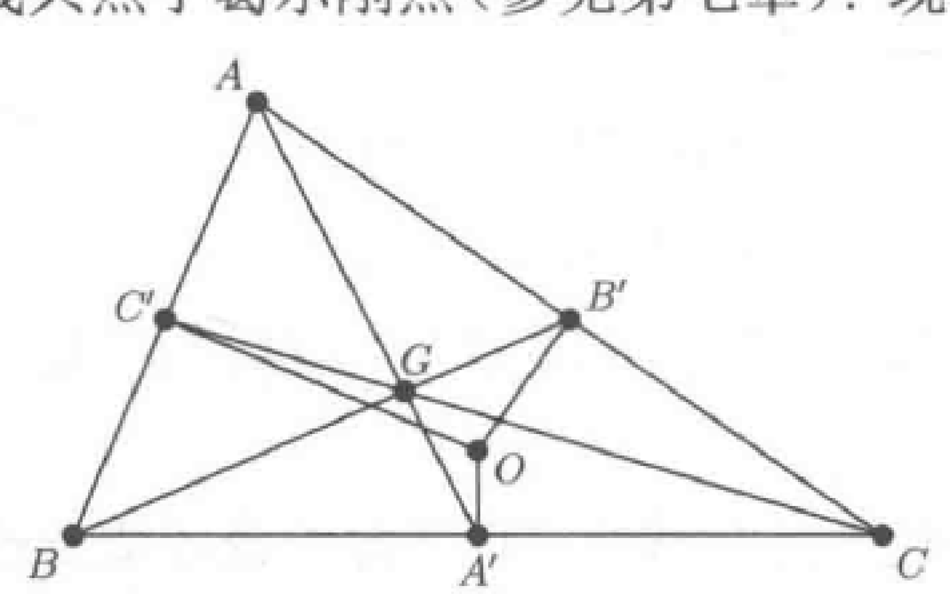


图 177

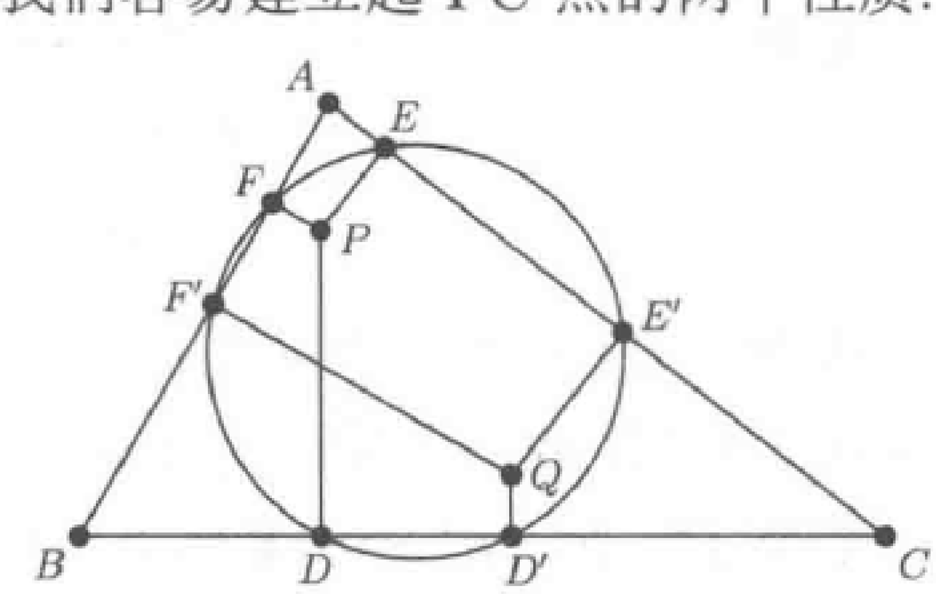


图 178

定理 3 *如果 P 是 $\triangle ABC$ 的一个 PC 点, 则它的等角共轭点 Q 也是一个 PC 点.*

证明 这是定理 2 的一个直接推论, 事实上一对等角点 (P, Q) 的垂足三角形, 具有一个公共的外接圆, 即它们的垂足圆(图 178).(垂足圆在第七章 p. 64 中

介绍过，参见图 84)．■

定理 4　如果点 P 是 $\triangle ABC$ 的一个 PC 点，则它关于外心 O 的反射点 P' 也是一个 PC 点.

证明　将点 P 关于点 O 进行反射，并从象 P' 向各边作垂线，垂足为点 D'，E' 和 F'，它们分别是点 D，E，F 关于各自所在边中点的反射点(图 179)．因此由定理 1，点 P' 的垂足 $\triangle D'E'F'$ 是一个塞瓦三角形，因而点 P' 是一个 PC 点．■

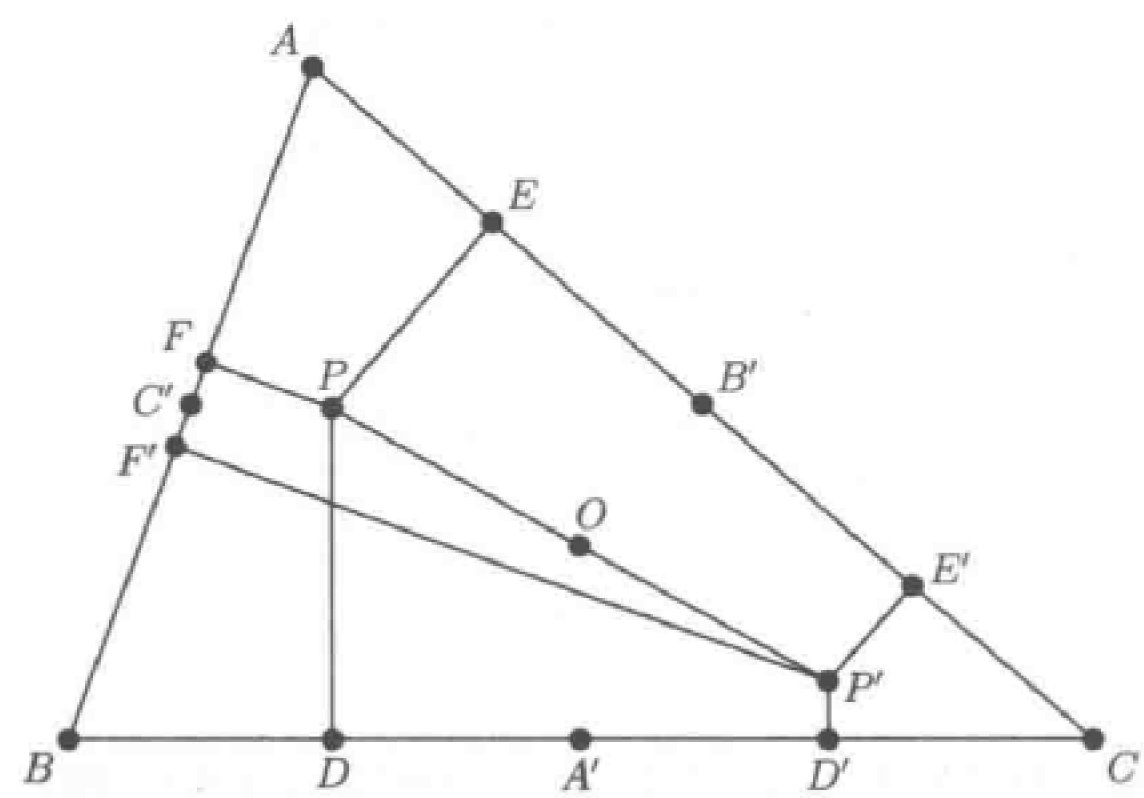


图 179

[143]

4. 春木关于圆的塞瓦型定理

最后，让我们以春木博(Hiroshi Haruki)教授的一个令人愉快的发现来结束这篇短文，他是我在滑铁卢大学一位多年的同事，直到几年前他退休.

春木(Haruki)定理　设三圆中的每一个与另外两圆中的每一个交于两点，则对于图 180 中所标记的线段，始终有

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=1.$$

其证明建立在如下事实之上：两相交圆的公共弦是它们的根轴 (radical axis)，而一个三圆组每次取一对圆所得到的三条根轴，共点于一个称为根心(radical center)的点．(关于根轴与根心的详细论述，参见 H. S. M. Coxeter 和 S. Greitzer 所著的 *Geometry Revisited*[①]，NML vol. 19，MAA 1967.)

① 译者注：这书有三种中译本．王昌锐译为《几何研究》，台北徐氏基金会 1970 年出版；王宗尧，王岳庭译为《几何重观》，河南教育出版社，1984 年 10 月出版；陈维桓译为《几何学的新探索》，北京大学出版社，1986 年 1 月出版.

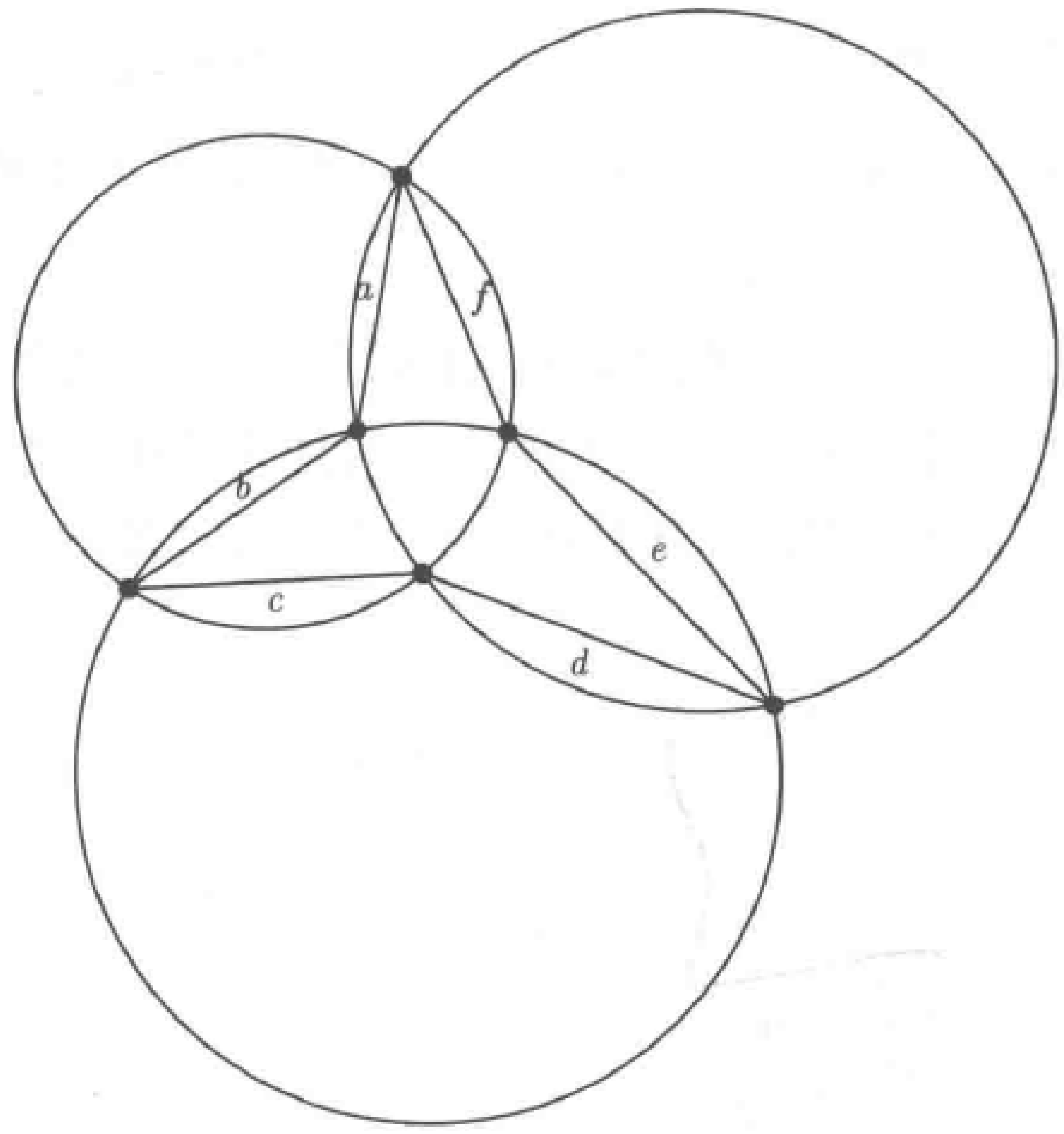


图 180

[144]

在三个圆的公共区域 DEF 中，每一对圆的一条公共弦共三条弦相交于根心 R，构成了六条小线段(图 181). 设 RD，RE 和 RF 这三条线段的长度为 x，y 和 z.

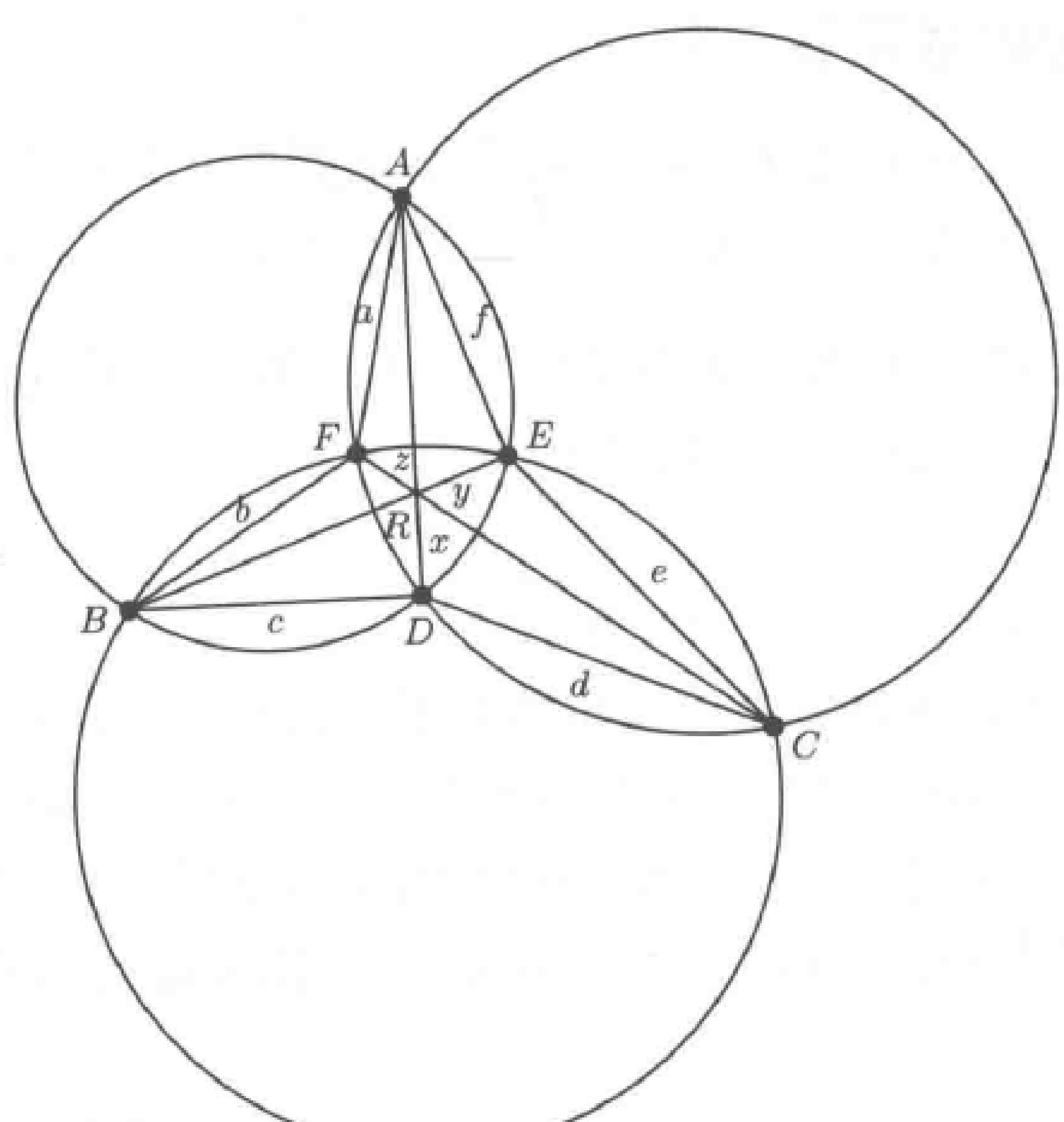


图 181

现在每个圆包含两条相交于 R 的公共弦，构成一对相似的三角形，它们的边中包含了 a，b，c，d，e，f 中的两个以及 x，y，z 中的两个. 例如，在图 182 中所示的公共弦 BE 和 CF 的情形下；从相似的三角形中，我们得到比例式

$$\frac{b}{z} = \frac{e}{y}.$$ [145]

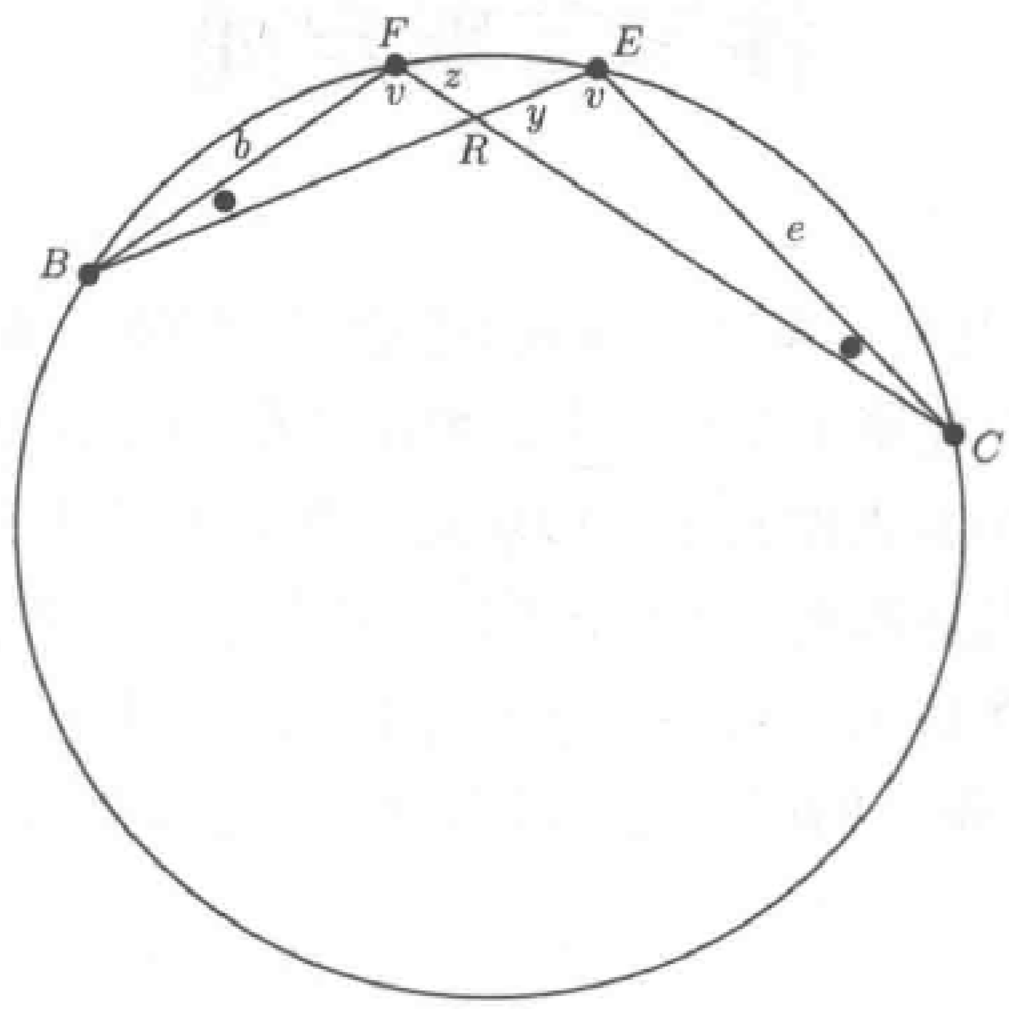


图 182

总共的，我们得到三个比例式

$$\frac{b}{z} = \frac{e}{y}, \quad \frac{f}{y} = \frac{c}{x}, \quad \frac{d}{x} = \frac{a}{z}.$$

它们的积给出

$$\frac{bfd}{zyx} = \frac{eca}{yxz}, \text{ 或者 } bfd = eca,$$

由此可得要求的关系式

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = 1. \blacksquare$$ [146]

第十三章

梅涅劳斯定理

1. 1678年，乔瓦尼·塞瓦在发表他的漂亮定理时，他还让一个伴随的定理重新复活，这一定理属于亚历山大的梅涅劳斯(Menelaus)，但自公元1世纪以来已差不多被所有人遗忘了. 与塞瓦定理给出了自三角形每个顶点引出一条的三条塞瓦线共点的充要条件的同时，梅涅劳斯定理涉及到对偶的性质，即关于在三角形每条边上一点的三个点的共线性. 两个定理都仅涉及到各边被分成的比的乘积. 唯一的区别是，在梅涅劳斯定理的情形中，乘积等于 -1 而不是 $+1$.

梅涅劳斯定理

分别在 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA 和 AB 上的点 L, M 和 N (图183)共线，当且仅当有向线段的比

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=-1.$$

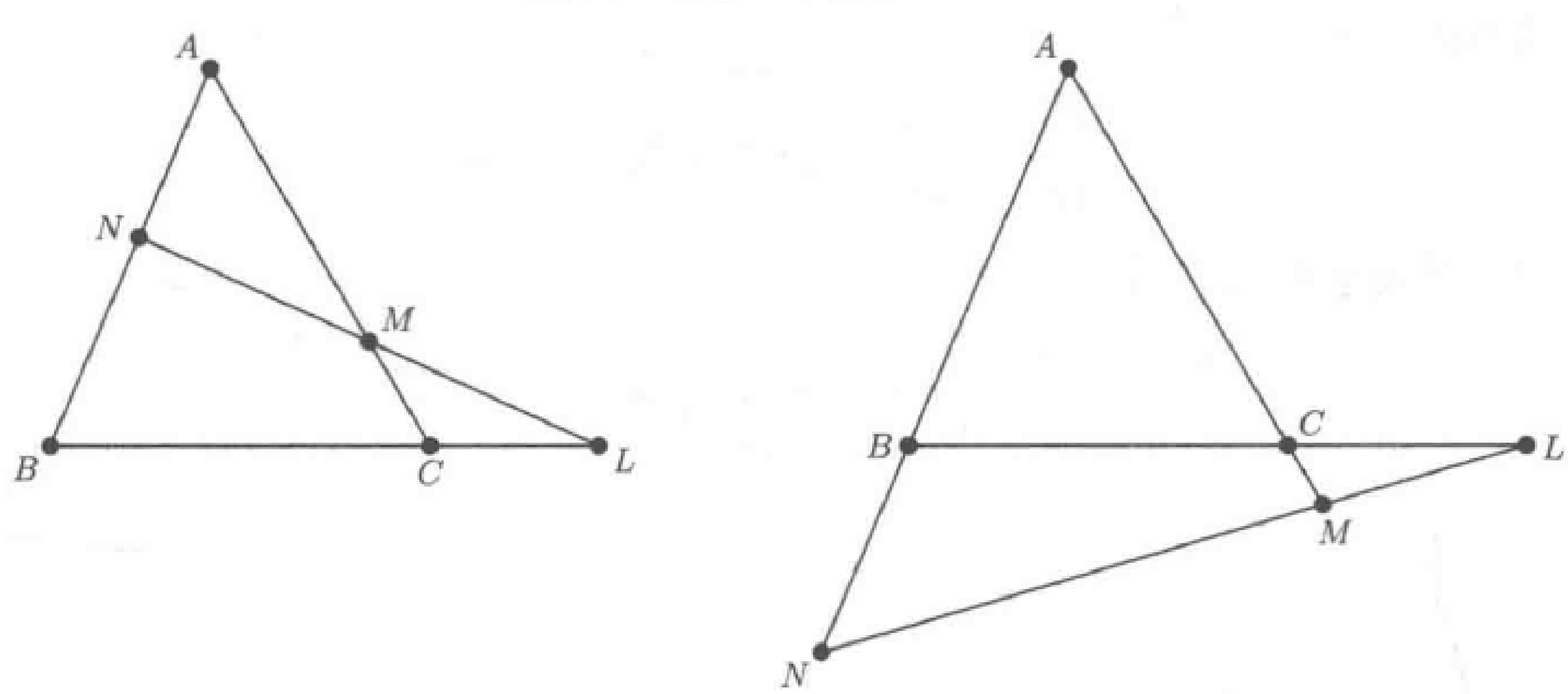


图183

证明 因为一条直线不可能与三角形的所有三条边都交于内部，除非至少
[147] 有一个已知点外分它所在的边，否则不可能共线. 显然，如果一条直线与三角