2022高考数学试题解答(全国甲卷理科)

BY ZHCOSIN

说明:

i. 非限时完成，实际用时远超两小时.

ii. 尚未核对答案，选择题第11题，我的答案与题目选项不完全一致导致无选项，后续验证.

1. $\frac{z}{z\,\bar{z}-1}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)-1}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{3}$,选 C.

2. 选B.

3. 选D.

4.选B.其实题是有毛病的，谁知道后面和底面有没有孔洞.三视题向来有此通病，不提了.

5. 首先应为奇函数，且在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上函数值取正值，选A.

6. 有 $f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}$, 且 $-2=f(1)=b$, $0=f'(1)=a-b$，故 $a=b=-2$.所以 $f'(2)=-\frac{1}{2}$.选B.

7.长方体对角线 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成角分别为 $\angle B_1DB$ 和 $\angle DB_1A$.这俩角相等就意味着 $BD=AB_1$，即是说底面 $ABCD$ 与正面 ABB_1A_1 是两个全等的矩形，且若设 对角线 B_1D 长度为1,则 $BB_1=AD=\frac{1}{2}$,从而左右两个侧面为正方形，对角线长 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，于是 B_1D 与右侧面 BB_1C_1C 所成角 $\angle DB_1C$ 为45度.选D.

8. $\triangle OAB$ 为等边三角形, $AB=2$，只要计算出 CD 就能应用题中公式，显然点 O、C、D共线，所以 $CD=OD-OC=r-r\cos\frac{\pi}{6}=2-\sqrt{3}$，代入公式得 $\widehat{AB}=2+\frac{(2-\sqrt{3})^2}{2}=\frac{11}{2}-2\sqrt{3}$.选 B.

9. 设圆锥母线长 l，底面半径 r，底面周长 C,高 h，侧面积 S'，底面积 S，体积 V，侧面展开圆心角为 α，那么有以下几何关系: $l^2=r^2+h^2$, $C=2\pi r$, $\alpha=\frac{C}{l}=\frac{r}{l}\cdot 2\pi$, $S'=\frac{\alpha}{2\pi}\pi l^2=\pi r l$, $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi r^2h$，于是记这两个圆锥共同母线长为 l，有 $r_1+r_2=l$，且 $r_1=2r_2$，因此有 $r_1=\frac{2}{3}l$, $r_2=\frac{1}{3}l$, $h_1=\frac{\sqrt{5}}{3}l$, $h_2=\frac{2\sqrt{2}}{3}l$，所以 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{r_1^2}{r_2^2}\cdot\frac{h_1}{h_2}=4\times\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{10}$. 选C.

10.点 $A(-a,\ 0)$,设 $P(m,\ n)$, $Q(-m,\ n)$，则 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=\frac{n}{m+a}\cdot\frac{n}{-m+a}=\frac{n^2}{a^2-m^2}=\frac{1}{4}$，即 $a^2=m^2+4n^2$，代入$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=1$ 求得$b^2=\frac{1}{4}m^2+n^2$，所以$a=2b$,离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 选 A.

11.题目即是要求$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)$ 在 $(0,\pi)$ 上有且只有两个零点，且 $f'(x)=\omega\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)$ 在 $(0,\pi)$ 上有且只有三个零点.首先 $\omega=0$ 不能满足题目要求，若 $\omega>0$，则 $\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\left(\omega+\frac{1}{3}\right)\pi\right)$，那么区间 $\left(\frac{\pi}{3},\left(\omega+\frac{1}{3}\right)\pi\right)$ 应包含 π、2π 但不能包含 3π，且应包含 $\frac{\pi}{2}$、$\frac{3\pi}{2}$、$\frac{5}{2}\pi$ 但不应包含 $\frac{7}{2}\pi$，所以 $2\pi+\frac{\pi}{2}<\left(\omega+\frac{1}{3}\right)\pi\leqslant 3\pi$，解得 $\frac{13}{6}<\omega\leqslant\frac{8}{3}$.类似的，若 $\omega<0$，则 $\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\left(\omega+\frac{1}{3}\right)\pi,\frac{\pi}{3}\right)$，那么区间 $\left(\left(\omega+\frac{1}{3}\right)\pi,\frac{\pi}{3}\right)$ 应包含 $-\pi$、0 但不得包含 -2π，应包含 $-\frac{\pi}{2}$、$-\frac{3\pi}{2}$、$-\frac{5\pi}{2}$ 但不得包含 $-\frac{7\pi}{2}$，所以 $-2\pi\leqslant\left(\omega+\frac{1}{3}\right)\pi<-\frac{5}{2}\pi$，解得 $-\frac{7}{3}\leqslant\omega<-\frac{17}{6}$，所以最终 ω 的取值范围是 $\left[-\frac{7}{3},-\frac{17}{6}\right)\cup\left(\frac{13}{6},\frac{8}{3}\right]$.答案C只有一半?.

12. 由 $\sin x<x<\tan x\left(\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 知 $\sin\frac{1}{4}<\frac{1}{4}<\frac{\sin\frac{1}{4}}{\cos\frac{1}{4}}$，从而 $c=4\sin\frac{1}{4}>\cos\frac{1}{4}=b$.再由 $\sin x>x-\frac{x^3}{3!}(\forall x>0)$ 得 $c=4\sin\frac{1}{4}>4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6\times 4^3}\right)=1-\frac{1}{6\times 4^2}>1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}=a$. 接下来需要比较 a 与 b 的大小，再由 $\cos x>1-\frac{x^2}{2!}(\forall x>0)$ 得 $b=\cos\frac{1}{4}>1-\frac{1}{2\times 16}=\frac{31}{32}=a$，所以最终$c>b>a$.选A，关于这里用到的正弦与余弦的估值，参见文末的附注.

13. 10.

14.$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

15.总共选法有 $C_8^4=40$ 种，共面的情况以下几种，6个面的顶点共6种选法，三个方向的六组对棱所在面的顶点共6种选法，所以概率$P=\frac{12}{C_8^4}=0.3$.

16. 作高线$AH.H$为垂足，则易知 DH=1,$AH=\sqrt{3}$，设 $BD=x$，则 $CD=2x$, 于是 $AC^2=AH^2+HC^2=3+(2x-1)^2=4(x^2-x+1)$，而$AB^2=AH^2+HB^2=3+(x+1)^2=x^2+2x+4$. 所以

$$\begin{aligned}\frac{AC^2}{AB^2} &= \frac{4(x^2-x+1)}{x^2+2x+4}\\ &= 4\left(1-\frac{3(x+1)}{x^2+2x+4}\right)\\ &= 4\left(1-\frac{3}{(x+1)+\frac{3}{x+1}}\right)\\ &\geqslant 4\left(1-\frac{3}{2\sqrt{3}}\right)=4-2\sqrt{3}\end{aligned}$$

等号在 $x+1=\frac{3}{x+1}$即 $x=\sqrt{3}-1$ 时取得，即$BD=\sqrt{3}-1$.

17. (1)当 $n>1$ 时，由 $2S_n=2na_n+n(1-n)$及 $2S_{n-1}=2(n-1)a_{n-1}+(n-1)(2-n)$，两式相减即得 $a_n-a_{n-1}=2$.

(2)设 $a_n=2n+x$, 则由 $a_4a_9=a_7^2$ 得 $(8+x)(18+x)=(14+x)^2$ 得 $x=-26$. 故而 $a_n=2n-26$. 而

$$\begin{aligned}2S_n &= 2na_n+n-n^2\\ &= 2n(2n-26)+n-n^2\\ &= 3n^2-51n\\ &= 3\left(n-\frac{51}{6}\right)^2-3\times\frac{51^2}{6^2}\end{aligned}$$

可见当 $n=8$ 或 $n=9$ 时, S_n 有最小值 $S_8=S_9=-108$.

18.(1)易得 $\angle ADC=\angle DCB=\frac{2}{3}\pi$，$\angle DAB=\angle ABC=\frac{\pi}{3}$,从而 $\angle CDB=\angle CBD=\frac{\pi}{6}$，因此$BD\perp AD$，同时有 $BD\perp PD$，因而BD垂直于面 PAD，从而 $BD\perp PA$.

(2).过 D 引 AB 的垂线，垂足为 X，连接 PX，再过 D 引PX 垂线，垂足为 Y，则由 $AB\perp DX$及$PD\perp AB$ 知 AB 垂直于面PDX，从而 AB 垂直于 DY，而 $DY\perp PX$，故而 DY 垂直于面 PAB，所以 $\angle DPX$ 就是 PD 与面 PAB 所成的角.在 $\mathrm{Rt}\triangle PDX$ 中, $PD=\sqrt{3}$, $DX=\frac{\sqrt{3}}{2}$.$\sin\angle DPX=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

19.(1). 设随机变量 $\xi_i(i=1,2,3)$，当甲校在第 i 个比赛项目中获胜时 $\xi_i=1$，否则 $\xi_i=0$. 于是, $P(\xi_1=1)=0.5$, $P(\xi_2=1)=0.4$, $P(\xi_3=1)=0.8$, 且三个随机变量相互独立，而甲校总得分是 $X=10\xi_1+10\xi_2+10\xi_3$. 乙校总得分则为 $Y=10(1-\xi_1)+10(1-\xi_2)+10(1-\xi_3)=30-(10\xi_1+10\xi_2+10\xi_3)=30-X$.甲校得冠军的充分必要条件是 $X>Y$，即 $X=10\xi_1+10\xi_2+10\xi_3>15$.于是三个随机变量至少要有两个为1. 所以获取的概率为 $P(X>Y)=P(\xi_1=1)P(\xi_2=1)P(\xi_3=0)+P(\xi_1=1)P(\xi_2=0)P(\xi_3=1)+P(\xi_1=0)P(\xi_2=1)P(\xi_3=1)+P(\xi_1=1)P(\xi_2=1)P(\xi_3=1)=0.5\cdot 0.4\cdot 0.2+0.5\cdot 0.6\cdot 0.8+0.5\cdot 0.4\cdot 0.8+0.5\cdot 0.4\cdot 0.8=0.04+0.24+0.16+0.16=0.6$.

(2). 在 (1) 中交换 X 和 Y 的意义，有 $X=30-10(\xi_1+\xi_2+\xi_3)$，由于 $\xi_1+\xi_2+\xi_3$ 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3，所以 X 的所有可能值为 30, 20, 10, 0

$P(X=30)=P(\xi_1+\xi_2+\xi_3=0)=P(\xi_1=0)P(\xi_2=0)P(\xi_3=0)=0.5\cdot 0.6\cdot 0.2=0.06$

$P(X=20)=P(\xi_1+\xi_2+\xi_3=1)=P(\xi_1=1)P(\xi_2=0)P(\xi_3=0)+P(\xi_1=0)P(\xi_2=1)P(\xi_3=0)+P(\xi_1=0)P(\xi_2=0)P(\xi_3=1)=0.5\cdot 0.6\cdot 0.2+0.5\cdot 0.4\cdot 0+4.4+6.8+1.80.2+0.5\cdot 0.6\cdot 0.8=0.34$

$P(X=10)=P(\xi_1+\xi_2+\xi_3=2)=P(\xi_1=1)P(\xi_2=1)P(\xi_3=0)+P(\xi_1=1)P(\xi_2=0)P(\xi_3=1)+P(\xi_1=0)P(\xi_2=1)P(\xi_3=1)=0.5\cdot 0.4\cdot 0.2+0.5\cdot 0.6\cdot 0.8+0.5\cdot 0.4\cdot 0.8=0.44$

$P(X=0)=P(\xi_1+\xi_2+\xi_3=3)=P(\xi_1=1)P(\xi_2=1)P(\xi_3=1)=0.5\cdot 0.4\cdot 0.8=0.16.$，故 X 的布列为

X	0	10	20	30
P	0.16	0.44	0.34	0.06

X 的期望为 $E(X)=0\cdot 0.16+10\cdot 0.44+20\cdot 0.34+30\cdot 0.06=13.$

20.(1). 有 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, $M(p,\pm\sqrt{2}p)$, $|MF|=\frac{3}{2}p=3$，故 $p=2$，抛物线的方程为 $y^2=4x$.

(2). 设直线 l_{MN} 的方程为 $x=ty+1$. 代入抛物线方程得 $y^2-4ty-4=0$，于是 $y_My_N=-4$, $y_M+y_N=4t$. 而 $M\left(\frac{y_M^2}{4},y_M\right)$, $N\left(\frac{y_N^2}{4},y_N\right)$.直线 MD 的方程为 $\frac{y}{x-2}=\frac{y_M}{\frac{y_M^2}{4}-2}$，即 $x=\frac{1}{y_M}\left(\frac{y_M^2}{4}-2\right)y+2$. 代入抛物线方程得 $y^2-\frac{1}{y_M}(y_M^2-8)y-8=0$, 即 $(y-y_M)\left(y+\frac{8}{y_M}\right)=0$，即 $y_A=-\frac{8}{y_M}$，于是 $A\left(\frac{16}{y_M^2},-\frac{8}{y_M}\right)$，同理有 $B\left(\frac{16}{y_N^2},-\frac{8}{y_N}\right)$，所以 $k_{MN}=\frac{y_M-y_N}{\frac{y_M^2}{4}-\frac{y_N^2}{4}}=\frac{4}{y_M+y_N}=\frac{1}{t}$，$k_{AB}=\frac{-8\left(\frac{1}{y_M}-\frac{1}{y_N}\right)}{16\left(\frac{1}{y_M^2}-\frac{1}{y_N^2}\right)}=-\frac{y_My_N}{2(y_M+y_N)}=\frac{1}{2t}$

所以 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{k_{AB}-k_{MN}}{1+k_{AB}\cdot k_{MN}}=\frac{\frac{1}{2t}}{1+\frac{1}{2t^2}}=\frac{1}{2t+\frac{1}{t}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}$. 等号当且仅当 $2t=\frac{1}{t}$ 即 $t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取得.在 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，直线 MN 与抛物线联立的方程为 $y^2-2\sqrt{2}y-4=0$，解得 $y=\sqrt{2}\pm\sqrt{6}$. 即 $M(2+\sqrt{3},\sqrt{2}+\sqrt{6})$, $N(2-\sqrt{3},\sqrt{2}-\sqrt{6})$，从而 $A\left(\frac{4}{2+\sqrt{3}},-\frac{8}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\right)$, $B\left(\frac{4}{2-\sqrt{3}},-\frac{8}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}\right)$，此时直线 AB 方程为 $x-\sqrt{6}y-20=0$. 同理可求得当 $t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时直线 AB 的方程为 $x+\sqrt{2}y-4=0$.

21.有 $f(1)=e+1-a$，$f'(x)=\frac{(x-1)\,e^x}{x^2}-\frac{1}{x}+1$.易得 $f'(1)=0$.$\forall x\in(0,1)$ 有 $f'(x)<-\frac{1}{x}+1<0$.同时 $\forall x>1$ 有 $f'(x)>-\frac{1}{x}+1>0$.故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上 $\downarrow$ 且严格递减，在 $(1,+\infty)$ 上 $\uparrow$ 且严格递增.

(1)由上述分析知 $f(x)$ 在 $x>0$ 时在 $x=1$ 处取最小值，所以只需要 $f(1)\geqslant 0$ 即可，得 $a\leqslant e+1$.

(2) 显然 x_1 与 x_2 分居 1 的两侧，设 $x_1<1<x_2$，只需要证明 $x_2<\frac{1}{x_1}$. 作函数 $h(x)=f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{e^x}{x}-\ln x+x-a\right)-\left(xe^{\frac{1}{x}}+\ln x+\frac{1}{x}-a\right)=\frac{e^x}{x}-xe^{\frac{1}{x}}-2\ln x+x-\frac{1}{x}$. 有 $h(1)=f(1)-f(1)=0$, 其导数 $h'(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)\left[(e^x+1)-\left(e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\right)\right]$. 易知 $h'(1)=0$，且 $\forall x>0$ 且 $x\neq 1$ 有 $h'(x)>0$，故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格增加，并且 $\forall x\in(0,1)$ 有 $h(x)<0$ ，而 $\forall x\in(0,+\infty)$ 有 $h(x)>0$.因此 $h(x_1)<0$，也就是 $f(x_1)<f\left(\frac{1}{x_1}\right)$，从而 $f(x_2)=f(x_1)<f\left(\frac{1}{x_1}\right)$，由于 $x_2>1$ 且 $\frac{1}{x_1}>1$，由 $f(x)$ 单调性即有 $x_2<\frac{1}{x_1}$，即 $x_1x_2<1$. 得证.

22.(1). 两立两式消去 t 得 $6x-2=t=y^2$，即 C_1 的普通方程为 $y^2=6x-2(y>0)$，注意这里只有半支抛物线.

(2). 同样消去 s 得 C_2 的普通方程为 $y^2=-6x-2(y<0)$. 对于 C_3，直角坐标系下的方程为 $2x-y=0$.联立 C_3 与 C_1 得 $2x^2-3x+1=0$，求得 $x=1$ 或 $x=\frac{1}{2}$.所以 C_3 与 C_1 交点为 $(1,2)$ 与 $\left(\frac{1}{2},1\right)$. 同理联立 C_2 与 C_3 的方程得 $2x^2+3x+1=0$ 得 $x=-1$ 或 $x=-\frac{1}{2}$，即 C_2 与 C_3 交点为 $(-1,-2)$ 与 $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$.

23. (1) 由基本不等 $(x_1+x_2+x_3)^2\leqslant 3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$ 即得 $(a+b+2c)^2\leqslant 3(a^2+b^2+4c^2)=9$. 故得 $a+b+2c\leqslant 3$.

(2) 有 $a^2+8c^2=3$，于是

$$
\begin{aligned}
3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)^2 &= (a^2+8c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ac}\right)\\
&= 9+\frac{a^2}{c^2}+\frac{2a}{c}+\frac{8c^2}{a^2}+\frac{16c}{a}\\
&= 9+\frac{1}{2}\left(\frac{16c^2}{a^2}+2\cdot\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{2a}{c}+\frac{8c}{a}+\frac{8c}{a}\right)\right)\\
&\geqslant 9+\frac{1}{2}\cdot 9\cdot\sqrt[9]{\frac{16c^2}{a^2}\cdot\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{2a}{c}+\frac{8c}{a}+\frac{8c}{a}\right)^2}\\
&= 9+\frac{1}{2}\cdot 9\cdot\sqrt[9]{2^{18}}\\
&= 27
\end{aligned}
$$

即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\geqslant 3$.

附注: 关于第12题，有以下结论:

题目 1. 对任意正整数 n，定义两个多项式如下

$$E_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!},\ L_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

1. 设 $x\neq 0$，证明：对任意正整数 n，都有 $e^x>E_n(x)$.
2. 设 $x>0$ ，证明: 当正整数 n 是奇数时，有 $\ln(1+x)<L_n(x)$，而当 n 是偶数时，有$\ln(1+x)>L_n(x)$.
3. 记

$$S_n(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ C_n(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

则当 $x>0$ 时，若 n 为偶数，则 $\sin x>S_n(x)$ 并且 $\cos x<C_n(x)$，反之若 n 为奇数，则 $\sin x<S_n(x)$ 并且 $\cos x>C_n(x)$.

解答. (1).令$f_n(x)=e^x-E_n(x)$，显然 $f_n(0)=0$，并且容易验证 $E'_{n+1}(x)=E_n(x)$，使用归纳法，当 $n=1$ 时，$f'_1(x)=e^x-E'_1(x)=e^x-1$，显然当 $x>0$ 时 $f'_1(x)>0$，即 $f_1(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格增加，而在 $x<0$ 时 $f'_1(x)<0$，$f_1(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上严格减少，故无论 x 符号如何恒有 $f_1(x)>f(0)=0$，所以 $n=1$ 时结论成立.

假定结论对于正整数 n 也成立，那么 $f'_{n+1}(x)=e^x-E'_{n+1}(x)=e^x-E_n(x)$，由假设可知 $f'_{n+1}(x)>0$，于是结论对于 $n+1$ 也成立.

(2). 同样作函数 $f(x)=\ln(1+x)-L_n(x)$，可以验证 $f(0)=0$ 以及

$$L'_n(x)=1-x+x^2-\cdots+(-x)^{n-1}=\frac{1-(-x)^n}{1+x}$$

因此

$$f'_n(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1-(-x)^n}{1+x}=\frac{(-x)^n}{1+x}$$

由此可见，若 n 为偶数，则函数 $f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格增加，反之若 n 为奇数，则是严格减少的，再结合 $f_n(0)=0$ 即得结论.

(3). 仍然作函数 $f_n(x)=\sin x-S_n(x)$ 与 $g_n(x)=\cos x-C_n(x)$，可以验证 $f_n(0)=g_n(0)=0$ 以及

$$f'(x)=g_n(x),\ g'_n(x)=-f_{n-1}(x)$$

对于 $n=0,1$ 的情况，不等式的验证此处略去，假如对于正整数 n 结论成立，那么对于 $n+1$ 的情况，由 $g'_{n+1}(x)=-f_n(x)$ 即知余弦的部分成立，再由 $f'_{n+1}(x)=g_n(x)$ 知正弦的部分成立.于是结论成立.