Ceva 三角形和反 Ceva 三角形
Ceva 四面体和反 Ceva 四面体

何万程

2023 年 3 月 1 日

定义 1. 给定 $\triangle ABC$ 及其平面内的一点 P，直线 AP、BP、CP 分别交直线 BC、CA、AB 于点 D、E、F，则 $\triangle DEF$ 称为点 P 关于 $\triangle ABC$ 的 Ceva 三角形，$\triangle ABC$ 称为点 P 关于 $\triangle DEF$ 的反 Ceva 三角形.

定理 1. 设 $\triangle ABC$ 中 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，点 P 是平面内一点. 直线 AP、BP、CP 交对应边所在直线于点 D、E、F，直线 AP、EF 交于点 D_1，直线 BP、FD 交于点 E_1，直线 CP、DE 交于点 F_1. 点 A'、B'、C' 分别在直线 AP、BP、CP 上，且满足点 A、B、C 分别在直线 $B'C'$、$C'A'$、$A'B'$ 上. $\triangle PBC$、$\triangle PCA$、$\triangle PAB$ 的有向面积比分别是 $\alpha:\beta:\gamma$，$\alpha+\beta+\gamma=1$. $\triangle PEF$、$\triangle PFD$、$\triangle PDE$ 的有向面积比分别是 $\alpha_1:\beta_1:\gamma_1$，$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=1$. $\triangle PB'C'$、$\triangle PC'A'$、$\triangle PA'B'$ 的有向面积比分别是 $\alpha_2:\beta_2:\gamma_2$，$\alpha_2+\beta_2+\gamma_2=1$. 则对于 $\triangle DEF$ 有：点 A、P 调和分割 DD_1，点 B、P 调和分割 EE_1，点 C、P 调和分割 FF_1，

$$\begin{aligned}
&\alpha_1=\frac{1-\alpha}{2},\ \beta_1=\frac{1-\beta}{2},\ \gamma_1=\frac{1-\gamma}{2},\\
&EF=\frac{\sqrt{\gamma(\gamma-\beta)(1-\beta)b^2+\beta(\beta-\gamma)(1-\gamma)^2b^2+\beta\gamma(1-\beta)(1-\gamma)a^2}}{|(1-\beta)(1-\gamma)|},\\
&FD=\frac{\sqrt{\alpha(\alpha-\gamma)(1-\gamma)c^2+\gamma(\gamma-\alpha)(1-\alpha)a^2+\gamma\alpha(1-\gamma)(1-\alpha)b^2}}{|(1-\gamma)(1-\alpha)|},\\
&DE=\frac{\sqrt{\beta(\beta-\alpha)(1-\alpha)a^2+\alpha(\alpha-\beta)(1-\beta)b^2+\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)c^2}}{|(1-\alpha)(1-\beta)|},\\
&S_{\triangle DEF}=\left|\frac{2\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}\right|S_{\triangle ABC};
\end{aligned}$$

对于 $\triangle A'B'C'$ 有：点 A'、P 调和分割 AD，点 B'、P 调和分割 BD，点 C'、P 调和分割 CD，

$$\begin{aligned}
&\alpha_2=1-2\alpha,\ \beta_2=1-2\beta,\ \gamma_2=1-2\gamma,\\
&B'C'=\left|\frac{2\alpha}{(1-2\beta)(1-2\gamma)}\right|\sqrt{\gamma(\gamma-\beta)b^2+\beta(\beta-\gamma)c^2+\beta\gamma a^2},\\
&C'A'=\left|\frac{2\beta}{(1-2\gamma)(1-2\alpha)}\right|\sqrt{\alpha(\alpha-\gamma)c^2+\gamma(\gamma-\alpha)a^2+\gamma\alpha b^2},\\
&A'B'=\left|\frac{2\gamma}{(1-2\alpha)(1-2\beta)}\right|\sqrt{\beta(\beta-\alpha)a^2+\alpha(\alpha-\beta)b^2+\alpha\beta c^2},\\
&S_{\triangle A'B'C'}=\left|\frac{4\alpha\beta\gamma}{(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}\right|S_{\triangle ABC}.
\end{aligned}$$

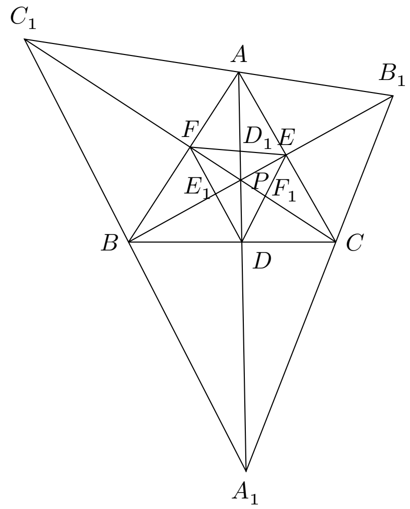

图 1

证明：如图 1，截线 CPF 和 $\triangle AFP$ 中由 Menelaus 定理得

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{CP}} = -1,$$

截线 ED_1F 和 $\triangle APC$ 中由 Menelaus 定理得

$$\frac{\overline{AD_1}}{\overline{D_1P}} \cdot \frac{\overline{PF}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -1,$$

截线 BPE 和 $\triangle AFC$ 中由 Menelaus 定理得

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{PF}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = -1,$$

以上三式相乘得

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{AD_1}}{\overline{D_1P}} = -1,$$

即

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AD_1}} = -\frac{\overline{PD}}{\overline{PD_1}},$$

所以点 A、P 调和分割 DD_1. 同理可证点 B、P 调和分割 EE_1，点 C、P 调和分割 FF_1，点 A'、P 调和分割 AD，点 B'、P 调和分割 BD，点 C'、P 调和分割 CD.

截线 AD_1P 和 $\triangle CEF$ 中由 Menelaus 定理得

$$\frac{\overline{ED_1}}{\overline{D_1F}} \cdot \frac{\overline{FP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{AE}} = -1,$$

而

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AE}} = -\frac{\alpha+\gamma}{\gamma} = -\frac{1-\beta}{\gamma},$$

截线 BPE 和 $\triangle ACF$ 中由 Menelaus 定理得

$$\frac{\overline{FP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{FP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \left(-\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right) = -1,$$

所以

$$\frac{\overline{FP}}{\overline{PC}} = \frac{\gamma}{\alpha+\beta} = \frac{\gamma}{1-\gamma},$$

由此可求得

$$\frac{\overline{ED_1}}{\overline{D_1F}} = \frac{1-\gamma}{1-\beta},$$

同理可求得

$$\frac{\overline{FE_1}}{\overline{E_1D}} = \frac{1-\alpha}{1-\gamma},\ \frac{\overline{DF_1}}{\overline{F_1E}} = \frac{1-\beta}{1-\alpha},$$

而

$$\frac{\overline{ED_1}}{\overline{D_1F}} = \frac{\gamma_1}{\beta_1},\ \frac{\overline{FE_1}}{\overline{E_1D}} = \frac{\alpha_1}{\gamma_1},\ \frac{\overline{DF_1}}{\overline{F_1E}} = \frac{\beta_1}{\alpha_1},\ \frac{1-\alpha}{2}+\frac{1-\beta}{2}+\frac{1-\gamma}{2}=1,$$

所以

$$\alpha_1 = \frac{1-\alpha}{2},\ \beta_1 = \frac{1-\beta}{2},\ \gamma_1 = \frac{1-\gamma}{2}.$$

类似的方法可求得

$$\alpha_2 = 1-2\alpha,\ \beta_2 = 1-2\beta,\ \gamma_2 = 1-2\gamma.$$

对于 $\triangle DEF$，因为

$$AE = \left|\frac{\gamma}{1-\gamma}\right| b,\ AF = \left|\frac{\beta}{1-\beta}\right| c,\ \cos\angle AF = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

所以

$$\begin{aligned} EF &= \sqrt{AE^2+AF^2-2\cdot AE\cdot AF\cdot\cos\angle A} \\ &= \frac{\sqrt{\gamma(\gamma-\beta)(1-\beta)b^2+\beta(\beta-\gamma)(1-\gamma)^2b^2+\beta\gamma(1-\beta)(1-\gamma)a^2}}{|(1-\beta)(1-\gamma)|}, \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} FD &= \frac{\sqrt{\alpha(\alpha-\gamma)(1-\gamma)c^2+\gamma(\gamma-\alpha)(1-\alpha)a^2+\gamma\alpha(1-\gamma)(1-\alpha)b^2}}{|(1-\gamma)(1-\alpha)|}, \\ DE &= \frac{\sqrt{\beta(\beta-\alpha)(1-\alpha)a^2+\alpha(\alpha-\beta)(1-\beta)b^2+\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)c^2}}{|(1-\alpha)(1-\beta)|}. \end{aligned}$$

对于 $\triangle A'B'C'$，用求 $\dfrac{\overline{FP}}{\overline{PC}}$ 的方法可求得

$$\frac{\overline{EP}}{\overline{PB}} = \frac{\beta}{1-\beta},$$

所以

$$\frac{\overline{BB'}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{BB'}-\overline{EB'}} = \frac{1}{1-\dfrac{\overline{EB'}}{\overline{BB'}}} = \frac{1}{1-\dfrac{\overline{EP}}{\overline{PB}}} = \frac{1}{1-\dfrac{\beta}{1-\beta}} = \frac{1-\beta}{1-2\beta},$$

因为

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB'} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB}+\frac{\overline{BB'}}{\overline{BE}}\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}+\frac{1-\beta}{1-2\beta}\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}+\frac{1-\beta}{1-2\beta}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\right) \\ &= -\frac{\beta}{1-2\beta}\overrightarrow{AB}+\frac{1-\beta}{1-2\beta}\frac{\gamma}{1-\beta}\overrightarrow{AC} = \frac{-\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}}{1-2\beta}, \end{aligned}$$

同理可得
$$\overrightarrow{AC'}=\frac{\beta\overrightarrow{AB}-\gamma\overrightarrow{AC}}{1-2\gamma},$$
所以
$$\overrightarrow{B'C'}=-\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}=\frac{2\alpha}{(1-2\beta)(1-2\gamma)}\left(\beta\overrightarrow{AB}-\gamma\overrightarrow{AC}\right),$$
由此可得
$$\begin{aligned}B'C'&=\left|\frac{2\alpha}{(1-2\beta)(1-2\gamma)}\right|\sqrt{\left(\beta\overrightarrow{AB}-\gamma\overrightarrow{AC}\right)^2}\\&=\left|\frac{2\alpha}{(1-2\beta)(1-2\gamma)}\right|\sqrt{\gamma(\gamma-\beta)b^2+\beta(\beta-\gamma)c^2+\beta\gamma a^2},\end{aligned}$$
同理可得
$$\begin{aligned}C'A'&=\left|\frac{2\beta}{(1-2\gamma)(1-2\alpha)}\right|\sqrt{\alpha(\alpha-\gamma)c^2+\gamma(\gamma-\alpha)a^2+\gamma\alpha b^2},\\A'B'&=\left|\frac{2\gamma}{(1-2\alpha)(1-2\beta)}\right|\sqrt{\beta(\beta-\alpha)a^2+\alpha(\alpha-\beta)b^2+\alpha\beta c^2}.\end{aligned}$$

以下用 $\overline{S_{\triangle XYZ}}$ 表示 $\triangle XYZ$ 的有向面积，如此类推
$$\begin{aligned}S_{\triangle DEF}&=\left|\overline{S_{\triangle ABC}}-\overline{S_{\triangle AFE}}-\overline{S_{\triangle BDF}}-\overline{S_{\triangle CED}}\right|\\&=\left|\overline{S_{\triangle ABC}}-\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\gamma}{1-\gamma}\overline{S_{\triangle ABC}}-\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{\alpha}{1-\alpha}\overline{S_{\triangle ABC}}-\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\beta}{1-\beta}\overline{S_{\triangle ABC}}\right|\\&=\left|\frac{2\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}\right|S_{\triangle ABC},\end{aligned}$$
因为 $\triangle ABC$ 是点 P 关于 $\triangle A'B'C'$ 的 Ceva 三角形，再用上面的结论可得
$$\begin{aligned}S_{\triangle A'B'C'}&=\left|\frac{(1-(1-2\alpha))(1-(1-2\beta))(1-(1-2\gamma))}{2(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}\right|S_{\triangle ABC}\\&=\left|\frac{4\alpha\beta\gamma}{(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}\right|S_{\triangle ABC}.\end{aligned}$$
□

例 1. 给定 $\triangle ABC$ 和点 P，求作点 P 关于 $\triangle ABC$ 的反 Ceva 三角形.

解： 分别作点 A'、B'、C'，使点 A'、P 调和分割 AD，点 B'、P 调和分割 BD，点 C'、P 调和分割 CD，由定理 1 可知 $\triangle A'B'C'$ 就是点 P 关于 $\triangle ABC$ 的反 Ceva 三角形. □

定理 2. 点 P 是平面内任一点不在 $\triangle ABC$ 三边上的点，直线 AP、BC 交于点 D，直线 BP、CA 交于点 E，直线 CP、AB 交于点 F，直线 BC、EF 交于点 K，直线 CA、FD 交于点 L，直线 AB、DE 交于点 M，则点 K、L、M 共线.

证明： 根据 Desarges 定理，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的对应顶点相交于点 P，所以对应边的交点共线. □

定理 2 中的点 P 称为 $\triangle ABC$ 的三线性极点，直线 KL 称为 $\triangle ABC$ 的三线性极线.

定理 3. 对固定的 $\triangle ABC$，不同的点 P 对应的三线性极线是不同的.

证明： 若直线 AP、BC 交于点 D，直线 BP、CA 交于点 E，直线 CP、AB 交于点 F，直线 AQ、BC 交于点 D_1，直线 BQ、CA 交于点 E_1，直线 CQ、AB 交于点 F_1，直线 BC、EF 交于点 K，直线 CA、FD 交于点 L，直线 AB、DE 交于点 M，那么直线 BC、E_1F_1 交于点 K，直线 CA、F_1D_1 交于点 L，直线 AB、D_1E_1 交于点 M. 若 $AE<AE_1$，则 $CE>CE_1$，$AE>AF_1$，所以 $CD>CD_1$，所以直线 FD 与直线 F_1D_1 的交点不是点 L，这与假设矛盾. □

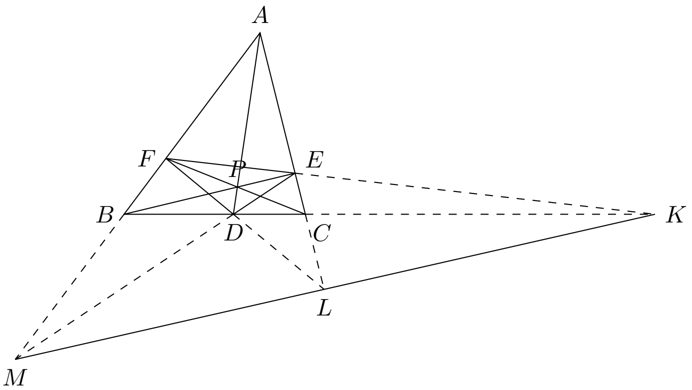

图 2

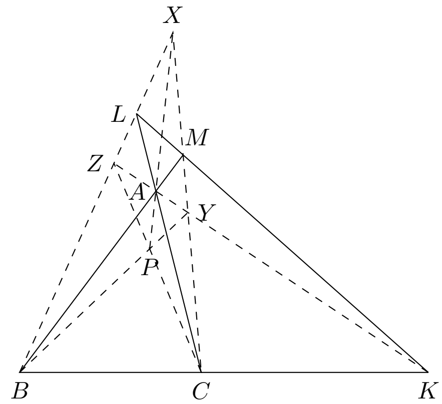

图 3

例 2. 给定 $\triangle ABC$ 及其三线性极线 l，求作 $\triangle ABC$ 的三线性极点.

作图法：步骤如下：

（1）作直线 l 分别与直线 BC、CD、AB 的交点 K、L、M；

（2）作直线 BL、CM 的交点 X，直线 CM、AK 的交点 Y，直线 AK、BL 的交点 Z；

（3）直线 AX、BY、CZ 相交于同一点 P，这个点就是所求. □

证明：根据 Desarges 定理的逆定理，$\triangle ABC$ 和 $\triangle XYZ$ 对应边的交点共线，所以对应顶点相交于点 P. 设直线 AP、BC 交于点 D，直线 BP、CA 交于点 E，直线 CP、AB 交于点 F. 又因为直线 AP 关于两直线 CA、AB 的极点是 K，直线 EF 与直线 BC 的交点是 K. 同理可证直线 FD 与直线 CA 的交点是 L，直线 DE 与直线 AB 的交点是 M. 所以点 P 就是所求的点. □

定义 2. 给定四面体 $ABCD$ 及其空间的一点 P，直线 AP、BP、CP、DP 分别交平面 BCD、ACD、ABD、ABC 于点 A_1、B_1、C_1，则四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 称为点 P 关于四面体 $ABCD$ 的 Ceva 四面体，四面体 $ABCD$ 称为点 P 关于四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 的反 Ceva 四面体.

定理 4. 四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 是点 P 关于四面体 $ABCD$ 的 Ceva 四面体，直线 AP、BP、CP、DP 分别交平面 BCD、ACD、ABD、ABC、$B_1C_1D_1$、$A_1C_1D_1$、$A_1B_1D_1$、$A_1B_1C_1$ 于点 A_1、B_1、C_1、D_1、E、F、G、H，$AB=a$，$AC=b$，$AD=c$，$CD=p$，$BD=q$，$BC=r$，四面体 $ABCD$ 的体积是 V，四面体 $PBCD$、$PADC$、$PABD$、$PACB$ 的有向体积比是 $\alpha:\beta:\gamma:\delta$，$\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$，四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 的体积是 V_1，四面体 $PB_1C_1D_1$、$PA_1D_1C_1$、$PA_1B_1D_1$、$PA_1C_1B_1$ 的有向体积比是 $\alpha_1:\beta_1:\gamma_1:\delta_1$，$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1=1$，则

$$\begin{aligned}
&\frac{\overline{A_1P}}{\overline{PE}}=-2\frac{\overline{A_1A}}{\overline{AE}},\ \frac{\overline{B_1P}}{\overline{PF}}=-2\frac{\overline{B_1B}}{\overline{BF}},\ \frac{\overline{C_1P}}{\overline{PG}}=-2\frac{\overline{C_1C}}{\overline{CG}},\ \frac{\overline{D_1P}}{\overline{PH}}=-2\frac{\overline{D_1D}}{\overline{DH}},\\
&\alpha_1=\frac{1-\alpha}{3},\ \beta_1=\frac{1-\beta}{3},\ \gamma_1=\frac{1-\gamma}{3},\ \delta_1=\frac{1-\delta}{3},\\
&A_1B_1=\frac{\sqrt{f(\gamma,\delta,\alpha,\beta,p,a,b,c,r,q)}}{|(1-\alpha)(1-\beta)|},\ C_1D_1=\frac{\sqrt{f(\alpha,\beta,\gamma,\delta,a,p,b,r,c,q)}}{|(1-\gamma)(1-\delta)|},\\
&A_1C_1=\frac{\sqrt{f(\beta,\delta,\alpha,\gamma,b,q,a,c,r,p)}}{|(1-\alpha)(1-\gamma)|},\ B_1D_1=\frac{\sqrt{f(\alpha,\gamma,\beta,\delta,q,b,a,r,c,p)}}{|(1-\beta)(1-\delta)|},\\
&A_1D_1=\frac{\sqrt{f(\beta,\gamma,\alpha,\delta,r,c,a,b,q,p)}}{|(1-\alpha)(1-\delta)|},\ B_1C_1=\frac{\sqrt{f(\alpha,\delta,\beta,\gamma,c,r,a,q,b,p)}}{|(1-\beta)(1-\gamma)|},\\
&V_1=\left|\frac{3\alpha\beta\gamma\delta}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)}\right|V,
\end{aligned}$$

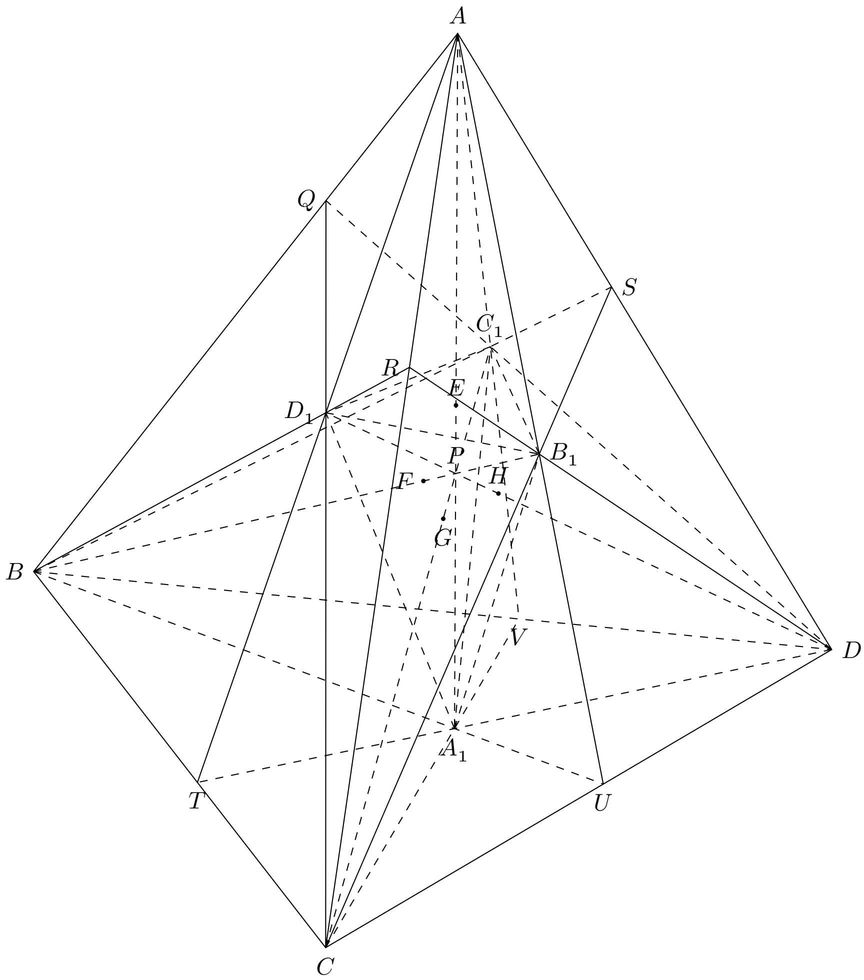

图 4

其中

$$
\begin{aligned}
& f(t_1,t_2,t_3,t_4,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6) \\
= & -t_1t_2(t_3-t_4)^2u_1^2+t_3t_4(1-t_3)(1-t_4)u_2^2 \\
& +t_1t_3(t_3-t_4)(1-t_3)u_3^2+t_2t_3(t_3-t_4)(1-t_3)u_4^2 \\
& +t_1t_4(t_4-t_3)(1-t_4)u_5^2+t_2t_4(t_4-t_3)(1-t_4)u_6^2.
\end{aligned}
$$

证明： 如图 4，因为

$$\overrightarrow{AB_1}=\frac{\gamma\overrightarrow{AC}+\delta\overrightarrow{AD}}{\alpha+\gamma+\delta},\ \overrightarrow{AC_1}=\frac{\beta\overrightarrow{AB}+\delta\overrightarrow{AD}}{\alpha+\beta+\delta},\ \overrightarrow{AD_1}=\frac{\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}}{\alpha+\beta+\gamma},$$

设 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB_1}+y\overrightarrow{AC_1}+z\overrightarrow{AD_1}$，则 $x+y+z=1$，而

$$
\begin{aligned}
x\overrightarrow{AB_1}+y\overrightarrow{AC_1}+z\overrightarrow{AD_1}= & \left(\frac{y}{\alpha+\beta+\delta}+\frac{z}{\alpha+\beta+\gamma}\right)\beta\overrightarrow{AB} \\
& +\left(\frac{x}{\alpha+\gamma+\delta}+\frac{z}{\alpha+\beta+\gamma}\right)\gamma\overrightarrow{AC} \\
& +\left(\frac{x}{\alpha+\gamma+\delta}+\frac{y}{\alpha+\beta+\delta}\right)\delta\overrightarrow{AD},
\end{aligned}
$$

又因为 $\overrightarrow{AP}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AB}+\delta\overrightarrow{AB}$，所以得

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ \dfrac{y}{\alpha+\beta+\delta}+\dfrac{z}{\alpha+\beta+\gamma}=\dfrac{x}{\alpha+\gamma+\delta}+\dfrac{z}{\alpha+\beta+\gamma}=\dfrac{x}{\alpha+\gamma+\delta}+\dfrac{y}{\alpha+\beta+\delta}=k, \end{cases}$$

解这个方程组得

$$\begin{cases} x=\dfrac{\alpha+\gamma+\delta}{3\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta}=\dfrac{1-\beta}{2+\alpha}, \\ y=\dfrac{\alpha+\beta+\delta}{3\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta}=\dfrac{1-\gamma}{2+\alpha}, \\ z=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta}=\dfrac{1-\delta}{2+\alpha}, \\ k=\dfrac{2}{3\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta}=\dfrac{2}{2+\alpha}, \end{cases}$$

所以

$$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{2+\alpha}\overrightarrow{AP},$$

又因为

$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{AP},$$

所以

$$\overrightarrow{A_1P}=-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AP}=-\frac{\alpha}{1-\alpha}\overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{PE}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AE}=\frac{\alpha}{2+\alpha}\overrightarrow{AP},$$

即

$$\frac{\overline{A_1P}}{\overline{PE}}=-2\frac{\overline{A_1A}}{\overline{AE}}=-\frac{2+\alpha}{1-\alpha},$$

同理可得

$$\frac{\overline{B_1P}}{\overline{PF}}=-2\frac{\overline{B_1B}}{\overline{BF}},\ \frac{\overline{C_1P}}{\overline{PG}}=-2\frac{\overline{C_1C}}{\overline{CG}},\ \frac{\overline{D_1P}}{\overline{PH}}=-2\frac{\overline{D_1D}}{\overline{DH}}.$$

四面体 PAD_1Q 的有向体积是

$$\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\cdot\delta\cdot\frac{\beta}{\alpha+\beta}V=\frac{\beta\gamma\delta}{(\alpha+\beta)(1-\delta)}V,$$

同理可得四面体 $PARD_1$、$PAQC_1$、PAC_1S、PAB_1R、$PASB_1$ 的有向体积分别是

$$\frac{\beta\gamma\delta}{(\alpha+\gamma)(1-\delta)}V,\ \frac{\beta\gamma\delta}{(\alpha+\beta)(1-\gamma)}V,\ \frac{\beta\gamma\delta}{(\alpha+\delta)(1-\gamma)}V,\ \frac{\beta\gamma\delta}{(\alpha+\gamma)(1-\beta)}V,\ \frac{\beta\gamma\delta}{(\alpha+\delta)(1-\beta)}V,$$

四面体 AQD_1C_1 的有向体积是

$$\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\cdot\frac{\delta}{\alpha+\beta+\delta}\cdot\frac{\beta}{\alpha+\beta}V=\frac{\beta\gamma\delta}{(\alpha+\beta)(1-\gamma)(1-\delta)}V,$$

同理可得四面体 ARB_1D_1、ASC_1B_1 的有向体积分别是

$$\frac{\beta\gamma\delta}{(\alpha+\gamma)(1-\beta)(1-\delta)}V,\ \frac{\beta\gamma\delta}{(\alpha+\delta)(1-\beta)(1-\gamma)}V,$$

由 Ceva 三角形的有向面积得 $\triangle TUV$ 的有向面积是

$$\frac{2\beta\gamma\delta}{(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta)}S_{\triangle BCD},$$

所以四面体 $AB_1C_1D_1$ 的有向体积是

$$\frac{2\beta\gamma\delta}{(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta)}\cdot\frac{\beta+\gamma}{1-\delta}\cdot\frac{\beta+\delta}{1-\gamma}\cdot\frac{\gamma+\delta}{1-\beta}=\frac{2\beta\gamma\delta}{(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)}V,$$

由此得四面体 $PB_1D_1C_1$ 的有向体积是

$$\begin{aligned}
&\frac{\beta\gamma\delta}{(\alpha+\beta)(1-\delta)}V+\frac{\beta\gamma\delta}{(\alpha+\gamma)(1-\delta)}V+\frac{\beta\gamma\delta}{(\alpha+\beta)(1-\gamma)}V\\
&+\frac{\beta\gamma\delta}{(\alpha+\delta)(1-\gamma)}V+\frac{\beta\gamma\delta}{(\alpha+\gamma)(1-\beta)}V+\frac{\beta\gamma\delta}{(\alpha+\delta)(1-\beta)}V\\
&-\frac{\beta\gamma\delta}{(\alpha+\beta)(1-\gamma)(1-\delta)}V-\frac{\beta\gamma\delta}{(\alpha+\gamma)(1-\beta)(1-\delta)}V-\frac{\beta\gamma\delta}{(\alpha+\delta)(1-\beta)(1-\gamma)}V\\
&-\frac{2\beta\gamma\delta}{(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)}V\\
=\,&K(1-\alpha)V,
\end{aligned}$$

其中

$$K=\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)},$$

同理可得四面体 $PA_1C_1D_1$、$PA_1D_1B_1$、$PA_1B_1C_1$ 的有向体积分别是

$$K(1-\beta)V,\ K(1-\gamma)V,\ K(1-\delta)V,$$

所以

$$\begin{aligned}
&V_1=|K(1-\alpha)V+K(1-\beta)V+K(1-\gamma)V+K(1-\delta)V|=3|K|V,\\
&\alpha_1:\beta_1:\gamma_1:\delta_1=(1-\alpha):(1-\beta):(1-\gamma):(1-\delta),
\end{aligned}$$

所以得

$$\alpha_1=\frac{1-\alpha}{3},\ \beta_1=\frac{1-\beta}{3},\ \gamma_1=\frac{1-\gamma}{3},\ \delta_1=\frac{1-\delta}{3}.$$

因为

$$\overrightarrow{AC_1}=\frac{\beta\overrightarrow{AB}+\delta\overrightarrow{AD}}{\alpha+\beta+\delta},\ \overrightarrow{AD_1}=\frac{\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}}{\alpha+\beta+\gamma},$$

所以

$$\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{AD_1}-\overrightarrow{AC_1}=\frac{\beta(\gamma-\delta)\overrightarrow{AB}-\gamma(1-\gamma)\overrightarrow{AC}+\delta(1-\delta)\overrightarrow{AD}}{(1-\gamma)(1-\delta)},$$

由此可得

$$C_1D_1=\frac{\sqrt{f(\alpha,\beta,\gamma,\delta,a,p,b,r,c,q)}}{|(1-\gamma)(1-\delta)|},$$

同理可得

$$\begin{aligned}
&A_1B_1=\frac{\sqrt{f(\gamma,\delta,\alpha,\beta,p,a,b,c,r,q)}}{|(1-\alpha)(1-\beta)|},\\
&A_1C_1=\frac{\sqrt{f(\beta,\delta,\alpha,\gamma,b,q,a,c,r,p)}}{|(1-\alpha)(1-\gamma)|},\ B_1D_1=\frac{\sqrt{f(\alpha,\gamma,\beta,\delta,q,b,a,r,c,p)}}{|(1-\beta)(1-\delta)|},\\
&A_1D_1=\frac{\sqrt{f(\beta,\gamma,\alpha,\delta,r,c,a,b,q,p)}}{|(1-\alpha)(1-\delta)|},\ B_1C_1=\frac{\sqrt{f(\alpha,\delta,\beta,\gamma,c,r,a,q,b,p)}}{|(1-\beta)(1-\gamma)|}.
\end{aligned}$$

□

定理 5. 四面体 $ABCD$ 是点 P 关于四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 的反 Ceva 四面体，直线 AP、BP、CP、DP 分别交平面 BCD、ACD、ABD、ABC、$B_1C_1D_1$、$A_1C_1D_1$、$A_1B_1D_1$、$A_1B_1C_1$ 于点 A_1、B_1、C_1、D_1、E、F、G、H，$A_1B_1=a$，$A_1C_1=b$，$A_1D_1=c$，$C_1D_1=p$，$B_1D_1=q$，$B_1C_1=r$，四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 的体积是 V，四面体 $PB_1C_1D_1$、$PA_1D_1C_1$、$PA_1B_1D_1$、$PA_1C_1B_1$ 的有向体积比是 $\alpha:\beta:\gamma:\delta$，$\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$，四面体 $ABCD$ 的体积是 V_1，四面体 $PBCD$、$PADC$、$PABD$、$PACB$ 的有向体积比是 $\alpha_1:\beta_1:\gamma_1:\delta_1$，$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1=1$，则

$$\begin{aligned}
&\frac{\overline{A_1P}}{\overline{PE}}=-2\frac{\overline{A_1A}}{\overline{AE}},\ \frac{\overline{B_1P}}{\overline{PF}}=-2\frac{\overline{B_1B}}{\overline{BF}},\ \frac{\overline{C_1P}}{\overline{PG}}=-2\frac{\overline{C_1C}}{\overline{CG}},\ \frac{\overline{D_1P}}{\overline{PH}}=-2\frac{\overline{D_1D}}{\overline{DH}},\\
&\alpha_1=1-3\alpha,\ \beta_1=1-3\beta,\ \gamma_1=1-3\gamma,\ \delta_1=1-3\delta,\\
&AB=\frac{3\sqrt{f(\gamma,\delta,\alpha,\beta,p,a,b,c,r,q)}}{|(1-3\alpha)(1-3\beta)|},\ CD=\frac{3\sqrt{f(\alpha,\beta,\gamma,\delta,a,p,b,r,c,q)}}{|(1-3\gamma)(1-3\delta)|},\\
&AC=\frac{3\sqrt{f(\beta,\delta,\alpha,\gamma,b,q,a,c,r,p)}}{|(1-3\alpha)(1-3\gamma)|},\ BD=\frac{3\sqrt{f(\alpha,\gamma,\beta,\delta,q,b,a,r,c,p)}}{|(1-3\beta)(1-3\delta)|},\\
&AD=\frac{3\sqrt{f(\beta,\gamma,\alpha,\delta,r,c,a,b,q,p)}}{|(1-3\alpha)(1-3\delta)|},\ BC=\frac{3\sqrt{f(\alpha,\delta,\beta,\gamma,c,r,a,q,b,p)}}{|(1-3\beta)(1-3\gamma)|},\\
&V_1=\left|\frac{27\alpha\beta\gamma\delta}{(1-3\alpha)(1-3\beta)(1-3\gamma)(1-3\delta)}\right|V.
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
&f(t_1,t_2,t_3,t_4,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6)\\
=&-t_1t_2(t_3-t_4)^2u_1^2+t_3t_4(t_1+t_2-t_3)(t_1+t_3-t_4)u_2^2\\
&+t_1t_3(t_3-t_4)(t_1+t_2-t_4)u_3^2+t_2t_3(t_3-t_4)(t_1+t_2-t_4)u_4^2\\
&+t_1t_4(t_4-t_3)(t_1+t_2-t_3)u_5^2+t_2t_4(t_4-t_3)(t_1+t_2-t_3)u_6^2.
\end{aligned}$$

证明： 如图 4，因为四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 是点 P 关于四面体 $ABCD$ 的 Ceva 四面体，由定理 4 可直接得

$$\begin{aligned}
&\frac{\overline{A_1P}}{\overline{PE}}=-2\frac{\overline{A_1A}}{\overline{AE}},\ \frac{\overline{B_1P}}{\overline{PF}}=-2\frac{\overline{B_1B}}{\overline{BF}},\ \frac{\overline{C_1P}}{\overline{PG}}=-2\frac{\overline{C_1C}}{\overline{CG}},\ \frac{\overline{D_1P}}{\overline{PH}}=-2\frac{\overline{D_1D}}{\overline{DH}},\\
&\alpha=\frac{1-\alpha_1}{3},\ \beta=\frac{1-\beta_1}{3},\ \gamma=\frac{1-\gamma_1}{3},\ \delta=\frac{1-\delta_1}{3},\\
&V=\left|\frac{3\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1}{(1-\alpha_1)(1-\beta_1)(1-\gamma_1)(1-\delta_1)}\right|V_1,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\alpha_1=1-3\alpha,\ \beta_1=1-3\beta,\ \gamma_1=1-3\gamma,\ \delta_1=1-3\delta,\\
&V_1=\left|\frac{27\alpha\beta\gamma\delta}{(1-3\alpha)(1-3\beta)(1-3\gamma)(1-3\delta)}\right|V.
\end{aligned}$$

由定理 4 的证明可知

$$\frac{\overline{C_1C}}{\overline{C_1G}}=\frac{\overline{C_1C}}{\overline{C_1C}+\overline{CG}}=\frac{1}{1+\dfrac{\overline{CG}}{\overline{C_1C}}}=\frac{1}{1-2\dfrac{1-\gamma_1}{2+\gamma_1}}=\frac{2+\gamma_1}{3\gamma_1}=\frac{1-\gamma}{1-3\gamma},$$

所以

$$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{C_1C}=\overrightarrow{A_1C_1}+\frac{\overline{C_1C}}{\overline{C_1G}}\overrightarrow{C_1G}=\overrightarrow{A_1C_1}-\frac{1-\gamma}{1-3\gamma}\overrightarrow{C_1G}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overrightarrow{A_1C_1} - \frac{1-\gamma}{1-3\gamma}\frac{\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}+\delta\overrightarrow{CD}}{1-\gamma} = \overrightarrow{A_1C_1} + \frac{\alpha\overrightarrow{C_1A_1}+\beta\overrightarrow{C_1B_1}+\delta\overrightarrow{C_1D_1}}{1-3\gamma}\\
&= \overrightarrow{A_1C_1} + \frac{-\alpha\overrightarrow{A_1C_1}+\beta\left(\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1C_1}\right)+\delta\left(\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{A_1C_1}\right)}{1-3\gamma}\\
&= \frac{\beta\overrightarrow{A_1B_1}-2\gamma\overrightarrow{A_1C_1}+\delta\overrightarrow{A_1D_1}}{1-3\gamma},
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
\overrightarrow{A_1D} = \frac{\beta\overrightarrow{A_1B_1}+\gamma\overrightarrow{A_1C_1}-2\delta\overrightarrow{A_1D_1}}{1-3\delta},
$$

由此可得

$$
\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{A_1D} = \frac{3\left(-\beta(\gamma-\delta)\overrightarrow{A_1B_1}+\gamma(\alpha+\beta-\delta)\overrightarrow{A_1C_1}-\delta(\alpha+\beta-\gamma)\overrightarrow{A_1D_1}\right)}{(1-\gamma)(1-\delta)},
$$

所以

$$
CD = \sqrt{\left(\overrightarrow{CD}\right)^2} = \frac{3\sqrt{f(\alpha,\beta,\gamma,\delta,a,p,b,r,c,q)}}{|(1-3\gamma)(1-3\delta)|},
$$

同理可得

$$
\begin{aligned}
&AB = \frac{3\sqrt{f(\gamma,\delta,\alpha,\beta,p,a,b,c,r,q)}}{|(1-3\alpha)(1-3\beta)|},\\
&AC = \frac{3\sqrt{f(\beta,\delta,\alpha,\gamma,b,q,a,c,r,p)}}{|(1-3\alpha)(1-3\gamma)|},\ BD = \frac{3\sqrt{f(\alpha,\gamma,\beta,\delta,q,b,a,r,c,p)}}{|(1-3\beta)(1-3\delta)|},\\
&AD = \frac{3\sqrt{f(\beta,\gamma,\alpha,\delta,r,c,a,b,q,p)}}{|(1-3\alpha)(1-3\delta)|},\ BC = \frac{3\sqrt{f(\alpha,\delta,\beta,\gamma,c,r,a,q,b,p)}}{|(1-3\beta)(1-3\gamma)|}.
\end{aligned}
$$
□

若给定点 P 和四面体 $A_1B_1C_1D_1$，作 A_1P、B_1P、C_1P、D_1P 分别交平面 $B_1C_1D_1$、$A_1C_1D_1$、$A_1B_1D_1$、$A_1B_1C_1$ 于点 E、F、G、H，再分别在直线 A_1P、B_1P、C_1P、D_1P 上作点 A、B、C、D，使其满足

$$
\frac{\overline{A_1P}}{\overline{PE}} = -2\frac{\overline{A_1A}}{\overline{AE}},\ \frac{\overline{B_1P}}{\overline{PF}} = -2\frac{\overline{B_1B}}{\overline{BF}},\ \frac{\overline{C_1P}}{\overline{PG}} = -2\frac{\overline{C_1C}}{\overline{CG}},\ \frac{\overline{D_1P}}{\overline{PH}} = -2\frac{\overline{D_1D}}{\overline{DH}},
$$

则四面体 $ABCD$ 就是点 P 关于四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 的反 Ceva 四面体.

定理 6. 四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 是点 P 关于四面体 $ABCD$ 的 Ceva 四面体，直线 AP、BP、CP、DP 分别交平面 BCD、ACD、ABD、ABC 于点 A_1、B_1、C_1、D_1，平面 BCD 与平面 $B_1C_1D_1$ 相交于直线 l_A，平面 ACD 与平面 $A_1C_1D_1$ 相交于直线 l_B，平面 ABD 与平面 $A_1B_1D_1$ 相交于直线 l_C，平面 ABC 与平面 $A_1B_1C_1$ 相交于直线 l_D，则 l_A、l_B、l_C、l_D 共面.

证明： 设直线 AB、A_1B_1 相交于点 P_{AB}，直线 AC、A_1C_1 相交于点 P_{AC}，直线 AD、A_1D_1 相交于点 P_{AD}，直线 BC、B_1C_1 相交于点 P_{BC}，直线 BD、B_1D_1 相交于点 P_{BD}，直线 CD、C_1D_1 相交于点 P_{CD}，则点 P_{AB} 在直线 l_C、l_D 上，点 P_{AC} 在直线 l_B、l_D 上，点 P_{AD} 在直线 l_B、l_C 上，点 P_{BC} 在直线 l_A、l_D 上，点 P_{BD} 在直线 l_A、l_C 上，点 P_{CD} 在直线 l_A、l_B 上，即直线 l_A、l_B、l_C、l_D 两两相交，所以 l_A、l_B、l_C、l_D 共面. □

定理 6 中的点 P 称为四面体 $ABCD$ 的四线性极点，直线 l_A、l_B、l_C、l_D 所确定的平面称为四面体 $ABCD$ 的四线性极平面.

如图 4，若给定四面体 $ABCD$ 的四线性极平面 π，分别作平面 π 与平面 BCD、ACD、ABD、ABC 的交线 l_A、l_B、l_C、l_D，再用三角形三线性极线的作图方法可得点 A_1、B_1、C_1、D_1，则直线 AA_1、BB_1 的交点就是为四面体 $ABCD$ 的四线性极点.