设圆柱底面半径是 r，当截面不与圆柱的轴平行时设截面与圆柱的轴所成角是 β.

当 $\beta = 90°$ 时，截线显然是圆，其半径是 r.

当 $\beta \neq 90°$ 时，如图 1，作与圆柱及截面 π 都相切的球 O_1、O_2，截面 π 与球 O_1 相切于点 F_1，截面 π 与球 O_2 相切于点 F_2，球 O_1 与圆柱相切的切线圆 C_1 所在平面是 π_1，球 O_2 与圆柱相切的切线圆 C_2 所在平面是 π_2，平面 π 与 π_1 相交于直线 l_1，平面 π 与 π_2 相交于直线 l_2.

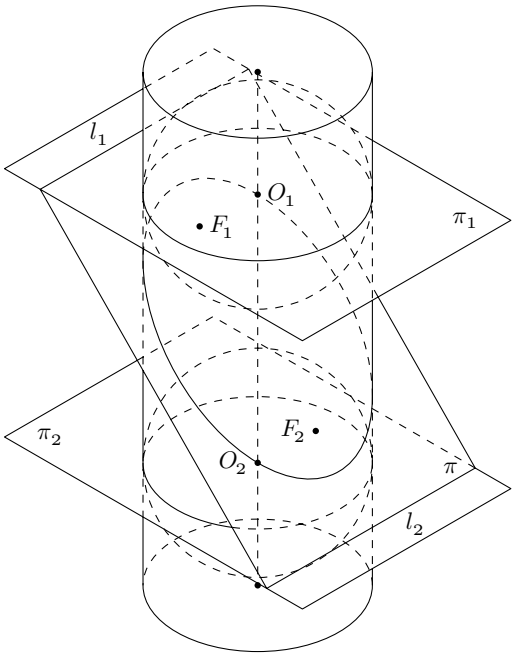

图 1

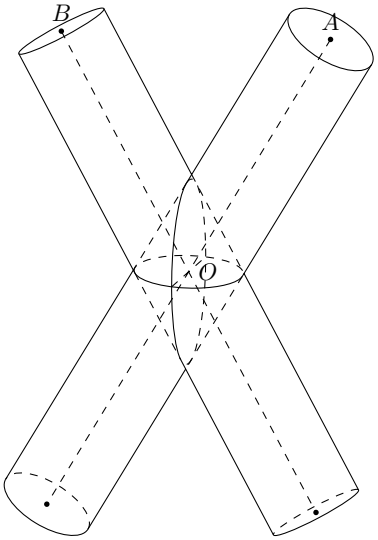

图 2

利用投影法可得截线是椭圆，其焦点是 F_1、F_2，定长是夹在 $\odot C_1$ 与 $\odot C_2$ 之间的圆锥母线段长度，其值是 $2r\csc\beta$，焦距是 $2r\cot\beta$；l_1 是焦点 F_1 的准线，l_2 是焦点 F_2 的准线，离心率是 $\cos\beta$.

设点 A 是截线的顶点，点 O 是截线的中心，点 A 沿着截线的一个方向走到点 P，圆锥展开成平面时，圆柱母线旋转过的角度是 θ，点 P 到过点 O 且与圆柱的轴垂直的平面的距离是 h，则

$$h = r\cot\beta\cos\theta,$$

由此得圆柱展开成平面时截线的方程是

$$y = r\cot\beta\cos\frac{x}{r},$$

当 $\beta = 90°$ 时截线是一条线段，当 $\beta \neq 90°$ 时截线是余弦曲线或正弦曲线的一段.

若圆柱面 A 有一个截面，A 的轴与截面 F_1 交点是 O，过点 O 且垂直于 A 的轴及 F_1 长轴的直线是 l，过 l 作垂直于 F_1 的另一截面 F_2. F_1、F_2 绕 A 的轴旋转 $180°$ 得截面 F_1'、F_2'，此时 F_1、F_2、F_1'、F_2' 有公共的交线 l，此时 A、绕 l 旋转使 F_1 与 F_1'、F_2 与 F_2' 分别重合，A 旋转后变为圆柱 B，此时 A、B 相交于截面 F_1、F_2，F_1、F_2 的交线垂直于 B、B 的轴（图 2）.

由此可知，两个轴相交、半径相等的圆柱的交线是两个椭圆，这两个椭圆的中心是轴的交点，两个椭圆所在平面互相垂直，圆柱两轴、椭圆两长轴在同一平面内，两个椭圆所在平面的交线与圆柱两轴垂直. 若圆柱两轴夹角是 β，则两椭圆所在平面与任意一个圆柱的轴的夹角分别是 $\dfrac{\beta}{2}$ 和 $90° - \dfrac{\beta}{2}$.

两个轴相交且互相垂直，半径是 r 的圆柱公共部分（图 3）形成的几何体（图 4）的体积是

$$\frac{16}{3}r^3.$$

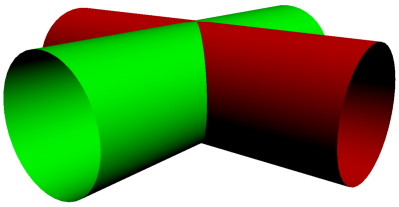

图 3

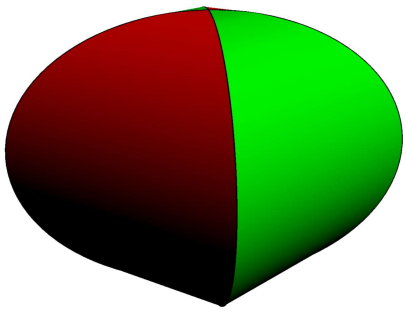

图 4

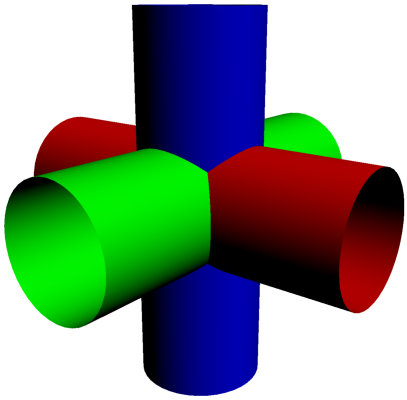

图 5

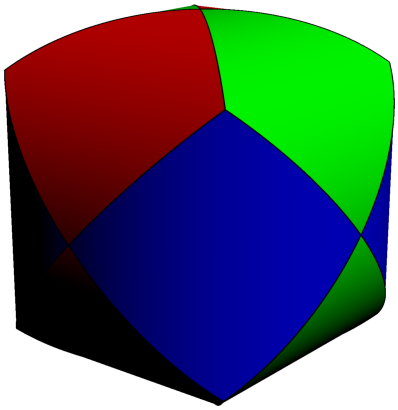

图 6

这个几何体可看作菱形十二面体补上一些圆柱片形成.

三个轴相交于一点且互相垂直，半径是 r 的圆柱公共部分（图 5）形成的几何体（图 6）的体积是

$$8\big(2-\sqrt{2}\big)r^3.$$

这个几何体可看作菱形十二面体补上一些圆柱片形成.

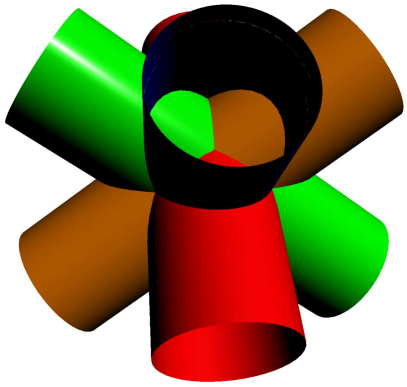

图 7

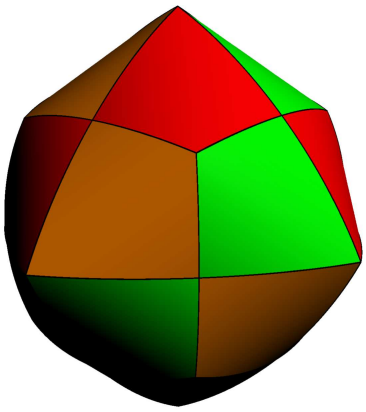

图 8

以正四面体或正方体的中心和顶点的连线为轴（相同的轴是为一个轴），半径是 r 的圆柱公共部分（图 7）形成的几何体（图 8）的体积是

$$12\sqrt{2}\big(2-\sqrt{3}\big)r^3,$$

这个几何体可看作菱形十二面体补上一些圆柱片形成.

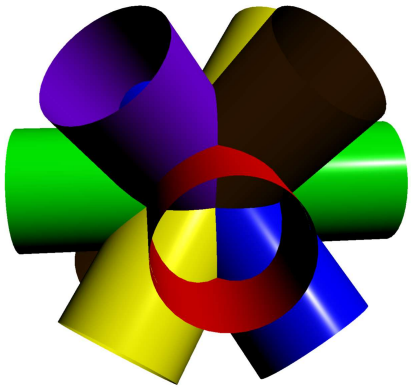

图 9

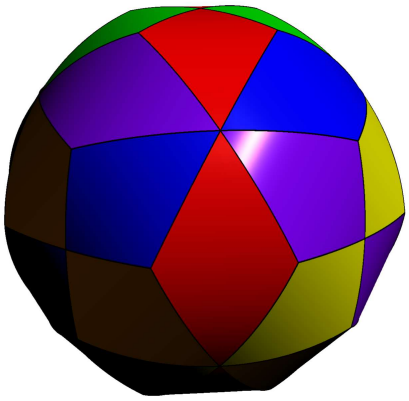

图 10

以平行于正方体面的对角线为轴（相同的轴是为一个轴），半径是 r 的圆柱公共部（图 9）分形成的几何体（图 10）的体积是

$$\frac{16}{3}\left(3-4\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)r^3,$$

这个几何体可看作截顶正八面体补上一些圆柱片形成.

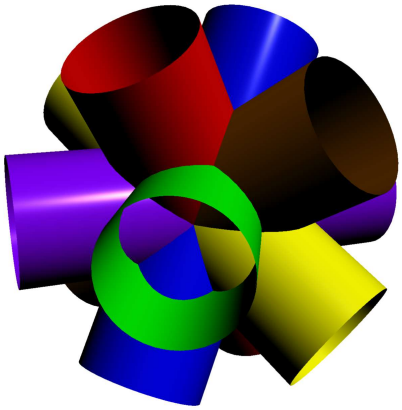

图 11

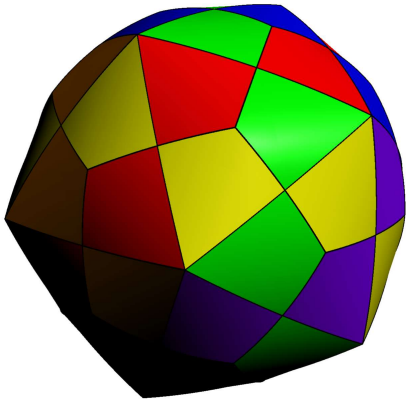

图 12

以正二十面体的中心和顶点的连线为轴（相同的轴是为一个轴），半径是 r 的圆柱公共部分形（图 11）成的几何体（图 12）的体积是

$$10\sqrt{5}\left(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)r^3,$$

这个几何体可看作菱形三十面体补上一些圆柱片形成.

以正十二面体的中心和顶点的连线为轴（相同的轴是为一个轴），半径是 r 的圆柱公共部（图 13）分形成的几何体（图 14）的体积是

$$5\left(24+24\sqrt{2}+\sqrt{3}-4\sqrt{6}-7\sqrt{15}-4\sqrt{30}\right)r^3.$$

图 15 到图 20 是 Steinmetz 型几何体某一圆柱区域的展开图，其中垂直方向是圆柱轴的方向，下面提到的曲线方程可能需要进行反射、平移后与展开图形的边界重合.

图 15 是图 4 几何体圆柱面一个区域的展开图，共 4 个这样的区域，边界的曲线方程是 $y=r\sin\dfrac{x}{r}$，$x\in[0,\pi r]$.

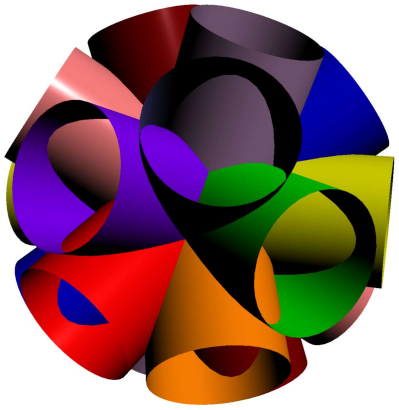

图 13

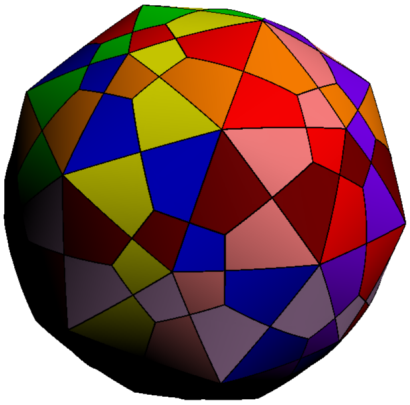

图 14

图 16 是图 6 几何体圆柱面一个区域的展开图，共 12 个这样的区域，边界的曲线方程是 $y = r\sin\dfrac{x}{r}$，$x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}r\right]$.

图 17 是图 8 几何体圆柱面一个区域的展开图，共 24 个这样的区域，边界的曲线方程是 $y = \sqrt{2}r\sin\dfrac{x}{r}$，$y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}r\sin\dfrac{x}{r}$，$x \in \left[0, \dfrac{\pi}{6}r\right]$.

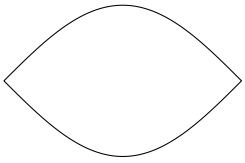

图 15

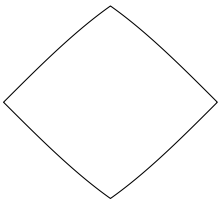

图 16

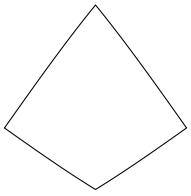

图 17

图 18、图 19 是图 10 几何体圆柱面一个区域的展开图，共 24 个图 18 这样的区域，12 个图 19 这样的区域，边界的曲线方程是 $y = r\sin\dfrac{x}{r}$，$x \in \left[0, r\arcsin\dfrac{1}{3}\right]$ 以及 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}r\sin\dfrac{x}{r}$，$x \in \left[0, r\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

图 20 是图 12 几何体圆柱面一个区域的展开图，共 60 个这样的区域，边界的曲线方程是 $y = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}r\sin\dfrac{x}{r}$，$y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}r\sin\dfrac{x}{r}$，$x \in \left[0, \dfrac{\pi}{10}r\right]$.

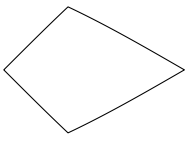

图 18

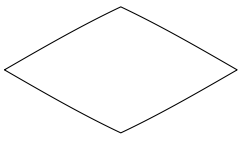

图 19

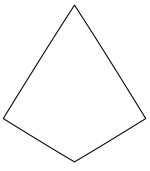

图 20

图 21、图 22 是图 14 几何体圆柱面一个区域的展开图，共 120 个图 21 这样的区域，60 个图 22 这样的区域，边界的曲线方程是 $y = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}r\sin\dfrac{x}{r}$，$x \in \left[0, r\arccos\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{30}}{8}\right]$；$y = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}r\sin\dfrac{x}{r}$，$x \in$

$\left[0, r\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right]$；$y=\sqrt{2}r\sin\dfrac{x}{r}$，$x\in\left[0, r\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right]$（图 21）及 $x\in\left[0, r\arccos\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{30}}{8}\right]$（图 22）；$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r\sin\dfrac{x}{r}$，$x\in\left[0, r\arccos\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{30}}{8}\right]$.

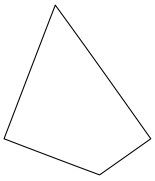

图 21

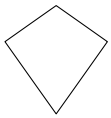

图 22