

Vandermonde 行列式的一个推广 及其在初等数学中的应用

肖 振 纲

(数学系)

文[1]、[2]先后利用复变函数中的留数定理讨论了初等数学中的 $I \cdot J \cdot Matrix$ 定理的两个推广,文[3]则用初等方法讨论了所述两个推广的关系。本文首先给出高等代数中著名的 $Vandermonde$ 行列式^[4]的一个推广(不同于文[5]),然后简单地导出 $I \cdot J \cdot Matrix$ 定理的两个推广,并由此进一步给出几类新颖而有趣的组合恒等式。

定理 1 设 n 是一个正整数, r 是一个非负整数,对任意 $n+1$ 个数 $x_0, x_1, \dots, x_n$, 令

$$D(n, r) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{r-1} & x_0^r \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{r-1} & x_1^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{r-1} & x_n^r \end{vmatrix} \quad (1)$$

则有

$$D(n, r) = \begin{cases} 0, & (0 \leq r \leq n-1) \\ \prod_{0 \leq j_0 < j_1 < \dots < j_r \leq n} (x_i - x_j) \sum_{j_0 + j_1 + \dots + j_r = r-n} x_0^{j_0} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_r}, & (r \geq n) \end{cases} \quad (2)$$

其中, $j_0, j_1, \dots, j_r$ 皆为非负整数(在后面的讨论中,这一说明从略)。

证明 当 $0 \leq r \leq n-1$ 时, $D(n, r)$ 中有两列元素相同,所以, $D(n, r) = 0$, 下面用数学归纳法证明 $r \geq n$ 的情形。

当 $r \geq 1$ 时,因

$$D(1, r) = x_1^r - x_0^r = (x_1 - x_0)(x_0^{r-1} + x_0^{r-2}x_1 + \dots + x_1^{r-1}) = (x_1 - x_0) \sum_{j_0 + j_1 = r-1} x_0^{j_0} x_1^{j_1}$$

所以,当 $n=1$ 时,结论成立,设结论对 $n-1$ ($n \geq 2, r \geq n-1$) 的情形成立,现考虑 n ($r \geq n$) 的情形。

将行列式 $D(n, r)$ 中的第 $n+1$ 列减去第 n 列的 x_n^{r-n+1} 倍,而对其余的列,自左至右依次从每一列减去它前一列的 x_n 倍,则由行列式的性质,有

$$D(n, r) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 - x_n & x_0^2 - x_0 x_n & x_0^{r-1} - x_0^{r-2} x_n & x_0^r - x_0^{r-1} x_n^{r-n+1} \\ 1 & x_1 - x_n & x_1^2 - x_1 x_n & x_1^{r-1} - x_1^{r-2} x_n & x_1^r - x_1^{r-1} x_n^{r-n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} - x_n & x_{n-1}^2 - x_{n-1} x_n & x_{n-1}^{r-1} - x_{n-1}^{r-2} x_n & x_{n-1}^r - x_{n-1}^{r-1} x_n^{r-n+1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{s+2} \begin{vmatrix} x_0 - x_s & x_0^2 - x_0 x_s & \cdots & x_0^{s-1} - x_0^{s-2} x_s & x_0^r - x_0^{s-1} x_s^{r-s+1} \\ x_1 - x_s & x_1^2 - x_1 x_s & \cdots & x_1^{s-1} - x_1^{s-2} x_s & x_1^r - x_1^{s-1} x_s^{r-s+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{s-1} - x_s & x_{s-1}^2 - x_{s-1} x_s & \cdots & x_{s-1}^{s-1} - x_{s-1}^{s-2} x_s & x_{s-1}^r - x_{s-1}^{s-1} x_s^{r-s+1} \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i=0}^{s-1} (x_s - x_i) \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{s-2} & x_0^{s-1} \sum_{k+j_s=r-s} x_0^k x_s^{j_s} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{s-2} & x_1^{s-1} \sum_{k+j_s=r-s} x_1^k x_s^{j_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{s-1} & \cdots & x_{s-1}^{s-2} & x_{s-1}^{s-1} \sum_{k+j_s=r-s} x_{s-1}^k x_s^{j_s} \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i=0}^{s-1} (x_s - x_i) \sum_{k+j_s=r-s} x_s^{j_s} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{s-2} & x_0^{s-1+k} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{s-2} & x_1^{s-1+k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{s-1} & \cdots & x_{s-1}^{s-2} & x_{s-1}^{s-1+k} \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i=0}^{s-1} (x_s - x_i) \sum_{k+j_s=r-s} x_s^{j_s} D(n-1, n-1+k)
\end{aligned}$$

因 $n-1+k \geq n-1$, 由归纳假设, 有

$$D(n-1, n-1+k) = \prod_{0 \leq j < i \leq s-1} (x_i - x_j) \sum_{j_0+j_1+\cdots+j_{s-1}=k} x_0^{j_0} x_1^{j_1} \cdots x_{s-1}^{j_{s-1}}$$

于是, 当 $r \geq n$ 时, 有

$$\begin{aligned}
D(n, r) &= \prod_{i=0}^{s-1} (x_s - x_i) \prod_{0 \leq j < i \leq s-1} (x_i - x_j) \sum_{k+j_s=r-s} x_s^{j_s} \sum_{j_0+j_1+\cdots+j_{s-1}=k} x_0^{j_0} x_1^{j_1} \cdots x_{s-1}^{j_{s-1}} \\
&= \prod_{0 \leq j < i \leq s} (x_i - x_j) \sum_{j_0+j_1+\cdots+j_s=r-s} x_0^{j_0} x_1^{j_1} \cdots x_s^{j_s}
\end{aligned}$$

因此, 结论对 n 的情形也成立, 故结论对一切正整数 n 皆成立, 证毕。

特别地, 当 $r=n$ 时, $D(n, n)$ 即为 $n+1$ 阶 Vandermonde 行列式, 由于

$$\sum_{j_0+j_1+\cdots+j_s=0} x_0^{j_0} x_1^{j_1} \cdots x_s^{j_s} = 1$$

因此, $D(n, n) = \prod_{0 \leq j < i \leq s} (x_i - x_j)$, 这正是著名的 Vandermonde 行列式的结论, 故定理 1 是它的一个推广。

我们还可以将 r 推广到负整数。

定理 2 设 n, r 皆为正整数, $x_0, x_1, \cdots, x_s$ 是 $n+1$ 个全不为零的数, 记

$$d = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^1 & \cdots & x_0^{s-1} & x_0^{-r} \\ 1 & x_1 & x_1^1 & \cdots & x_1^{s-1} & x_1^{-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_s & x_s^1 & \cdots & x_s^{s-1} & x_s^{-r} \end{vmatrix} \quad (3)$$

则

$$d = \frac{(-1)^s \prod_{0 \leq j < i \leq s} (x_i - x_j)}{\prod_{0 \leq i \leq s} x_i} \sum_{j_0+j_1+\cdots+j_s=r-1} x_0^{-j_0} x_1^{-j_1} \cdots x_s^{-j_s} \quad (4)$$

证明 由行列式的性质及定理 1, 有

$$\begin{aligned}
 d &= \left(\prod_{0 \leq i \leq n} x_i \right)^{n-1} \begin{vmatrix} x_0^{-(n-1)} & x_0^{-(n-2)} & \cdots & 1 & x_0^{-(r+n-1)} \\ x_1^{-(n-1)} & x_1^{-(n-2)} & \cdots & 1 & x_1^{-(r+n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{-(n-1)} & x_n^{-(n-2)} & \cdots & 1 & x_n^{-(r+n-1)} \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\prod_{0 \leq i \leq n} x_i \right)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & x_0^{-1} & \cdots & x_0^{-(n-1)} & x_0^{-(r+n-1)} \\ 1 & x_1^{-1} & \cdots & x_1^{-(n-1)} & x_1^{-(r+n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n^{-1} & \cdots & x_n^{-(n-1)} & x_n^{-(r+n-1)} \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\prod_{0 \leq i \leq n} x_i \right)^{n-1} \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i^{-1} - x_j^{-1}) \sum_{j_0+j_1+\cdots+j_n=r-1} x_0^{-j_0} x_1^{-j_1} \cdots x_n^{-j_n}
 \end{aligned}$$

但 $\prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i^{-1} - x_j^{-1}) = \left(\prod_{0 \leq i \leq n} x_i \right)^{-n} \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_j - x_i) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\prod_{0 \leq i \leq n} x_i \right)^{-n} \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$

故
$$\begin{aligned}
 d &= (-1)^{n^2} \left(\prod_{0 \leq i \leq n} x_i \right)^{-1} \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \sum_{j_0+j_1+\cdots+j_n=r-1} x_0^{-j_0} x_1^{-j_1} \cdots x_n^{-j_n} \\
 &= \frac{(-1)^n \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)}{\prod_{0 \leq i \leq n} x_i} \sum_{j_0+j_1+\cdots+j_n=r-1} x_0^{-j_0} x_1^{-j_1} \cdots x_n^{-j_n} \quad \text{证毕}
 \end{aligned}$$

现在给出推广后的 *Vandermonde* 行列式在初等数学中的一些应用。

设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 互不相等, 记

$$A_k = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{k-1} & x_{k-1}^2 & \cdots & x_{k-1}^{n-1} \\ 1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 & \cdots & x_{k+1}^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

其中, $k=0, 1, 2, \cdots, n$, 则 A_k 是一个 n 阶 *Vandermonde* 行列式, 因此有

$$A_k = \prod_{\substack{0 \leq j < i \leq n \\ i, j \neq k}} (x_i - x_j) = (-1)^{n-k} \frac{\prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)}{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x_i - x_j)}$$

于是, 将行列式(1)按第 $n+1$ 列展开即得

$$D(n, r) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} x_k^r A_k = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \sum_{k=0}^n \frac{x_k^r}{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x_i - x_j)}$$

从而由(2)式立即得到

定理 3 设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是 $n+1$ 个互不相等的数, r 是一个非负整数, 则有

$$\sum_{k=0}^n \frac{x_k^r}{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x_i - x_j)} = \begin{cases} 0 & (0 \leq r \leq n-1) \\ \sum_{j_0+j_1+\cdots+j_n=r-n} x_0^{j_0} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} & (r \geq n) \end{cases} \quad (5)$$

(5)式即文[1]所述 $I \cdot J \cdot Matrix$ 定理的推广。

同样,将行列式(3)按第 $n+1$ 列展开,再由(4)式可得。

定理 4 设 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 是 $n+1$ 个互不相等且全不为零的数, r 是一个正整数,则有

$$\sum_{i=0}^n \frac{x_i^{-r}}{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)} = \frac{(-1)^n}{\prod_{0 \leq i \leq n} x_i} \sum_{j_0+j_1+\dots+j_n=r-1} x_0^{-j_0} x_1^{-j_1} \dots x_n^{-j_n} \quad (6)$$

(6)式即文[2]所述 $I \cdot J \cdot Matrix$ 定理的再推广。

如果 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 是一个公差为 d ($d \neq 0$) 的等差数列,则易知

$$\frac{1}{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)} = (-1)^{n-1} \frac{C_n^i}{n! d^n}$$

其中, $k=0, 1, 2, \dots, n$. 于是由定理 3 即可得到一类与等差数列有关的深刻而有趣的组合恒等式:

定理 5 设 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 是一个公差为 d 的等差数列, r 是一个非负整数,则有

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{i-1} a_i^r C_n^i = \begin{cases} 0 & (0 \leq r \leq n-1) \\ n! d^r \sum_{j_0+j_1+\dots+j_n=r-n} a_0^{j_0} a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} & (r \geq n) \end{cases} \quad (7)$$

注意到 $j_0, j_1, \dots, j_n$ 都取非负整数时,有

$$\begin{aligned} \sum_{j_0+j_1+\dots+j_n=0} a_0^{j_0} a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} &= 1 \\ \sum_{j_0+j_1+\dots+j_n=1} a_0^{j_0} a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} &= \sum_{i=0}^n a_i \\ \sum_{j_0+j_1+\dots+j_n=2} a_0^{j_0} a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} &= \sum_{i=0}^n a_i^2 + \sum_{0 \leq i < j \leq n} a_i a_j = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n a_i^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^n a_i \right)^2 \\ \sum_{j_0+j_1+\dots+j_n=3} a_0^{j_0} a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} &= \sum_{i=0}^n a_i^3 + \sum_{i \neq j} a_i^2 a_j + \sum_{0 \leq i < j < k \leq n} a_i a_j a_k \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=0}^n a_i^3 + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) + \frac{1}{6} \left(\sum_{i=0}^n a_i \right)^3 \end{aligned}$$

又当 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 是公差为 d 的等差数列时,有

$$\sum_{i=0}^n a_i = \frac{1}{2} (n+1) (a_0 + a_n) \quad (8)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i^2 = \frac{1}{6} n (n+1) d^2 + \frac{1}{3} (n+1) (a_0^2 + a_0 a_n + a_n^2) \quad (9)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i^3 = \frac{1}{4} (n+1) (a_0 + a_n) (a_0^2 + a_n^2 + n d^2) \quad (10)$$

其中, (8)式是熟知的, (9), (10)两式不难用数学归纳法或其它方法证明,于是可得

$$\begin{aligned} \sum_{j_0+j_1+\dots+j_n=1} a_0^{j_0} a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} &= \frac{1}{2} (n+1) (a_0 + a_n) \\ \sum_{j_0+j_1+\dots+j_n=2} a_0^{j_0} a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} &= \frac{1}{12} (n+1) [(3n+5) (a_0 + a_n)^2 + 2(a_0^2 + a_n^2 + n d^2)] \\ \sum_{j_0+j_1+\dots+j_n=3} a_0^{j_0} a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} &= \frac{1}{48} (n+1) (n+3) (a_0 + a_n) [(n+1) (a_0 + a_n)^2 + 2(a_0^2 + a_n^2 + n d^2)] \end{aligned}$$

故在(7)式中分别令 $r=n, n+1, n+2, n+3$ 即得

推论 设 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 是一个公差为 d 的等差数列, 则有

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{i-1} a_i^1 c_i^1 = n! \cdot d^n \quad (11)$$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{i-1} a_i^{1+1} c_i^1 = \frac{(n+1)!}{2} d^n (a_0 + a_n) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n (-1)^{i-1} a_i^{1+2} c_i^1 \\ &= \frac{(n+1)!}{12} d^n [(3n+5)(a_0 + a_n)^2 + 2(a_0^2 + a_n^2 + nd^2)] \end{aligned} \quad (13)$$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{i-1} a_i^{1+3} c_i^1 = \frac{(n+1)!}{48} d^n (n+3)(a_0 + a_n) [(n+1)(a_0 + a_n)^2 + 2(a_0^2 + a_n^2 + nd^2)] \quad (14)$$

特别地, 当 $a_i = k (k=0, 1, \dots, n)$ 时, $d=1$, 于是由推论, 可得

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} k^1 c_i^1 = n! \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} k^{1+1} c_i^1 = \frac{1}{2} n(n+1)! \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} k^{1+2} c_i^1 = \frac{1}{24} n(3n+1)(n+2)! \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} k^{1+3} c_i^1 = \frac{1}{48} n^2(n+1)(n+3)! \quad (18)$$

同样, 由定理 4 可得另一类与等差数列有关的有趣的组合恒等式。

定理 6 设 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 是一个公差为 d 的, 各项都不为零的等差数列, r 是一个正整数, 则有

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^{-r} c_i^1 = \frac{n! \cdot d^n}{\prod_{0 \leq i \leq n} a_i} \sum_{j_0+j_1+\dots+j_n=r-1} a_0^{-j_0} a_1^{-j_1} \dots a_n^{-j_n} \quad (19)$$

特别地, 当 r 分别为 1, 2 时, 由 (19) 式可得

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{c_i^1}{a_i} = \frac{n! \cdot d^n}{\prod_{0 \leq i \leq n} a_i} \quad (20)$$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{c_i^1}{a_i^2} = \frac{n! \cdot d^n}{\prod_{0 \leq i \leq n} a_i} \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{a_i} \quad (21)$$

若取 $a_i = k+1 (0 \leq k \leq n)$, 则 (20), (21) 变为

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{c_i^1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \quad (22)$$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{c_i^1}{(k+1)^2} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{k} \quad (23)$$

若取 $a_i = 2k+1 (0 \leq k \leq n)$, 则由 (20), (21) 两式得 (注意 $(2n+1)! = 2^n \cdot n! \cdot (2n+1)!!$)

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{c_i^1}{2k+1} = \frac{4^n}{(2n+1)C_{2n}^n} \quad (24)$$

(下转 32 页)

高,中远距离投篮的提射角几乎趋向定值 47°左右,表明中远距离投篮时,投射角几乎相同。

4.4 跳起投篮提高了出手高度,投射角度小,球在空中飞行的抛物线比原地投篮时短,球受外力的影响就小,飞行较稳定,有利于控制球的方向,能提高命中率。

5 篮球的后旋与命中率

中远距离单手投篮的压腕动作,双手投篮的拇指拨球,都能使球产生后旋,后旋球有以下优点:

5.1 能使球保持正确的方向前进,不会偏左偏右,因为球在左右方向上,不产生压强差。

5.2 后旋球碰到篮圈上缘时,往往会由于球的后旋,给篮圈上缘一个向前的作用力,篮圈上缘给球下部一个向后的摩擦力,这时球的上部依惯性向前,而滚入篮圈内。

5.3 后旋球在空中飞行时,由于球的后旋球下部的空气流速慢,压强大,球上部的空气流速快压强小,球飞行的轨迹曲率小,只要在投篮时瞄得准的情况下,更有利于球入篮圈。

5.4 后旋球碰在篮板上时(指正对篮板投篮而言),球会反射性的进入篮圈内,因后旋球碰板时,球的旋转给板一个向上的作用力,板给球一个向下的摩擦力、使球的反射角大于入射角球向篮圈反射。

此外,在跳起投篮时,最好在身体上升到高点瞬间,将球投出,以免影响球的准确飞行路线,提高命中率。

参 考 文 献

詹姆斯·海著[美] 强成敏译 程乾校.运动技术生物力学(上册) 北京体校编译室 1981

(上接 48 页)

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{C_n^k}{(2k+1)^2} = \frac{4^n}{(2n+1)C_{2n}^n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2K+1} \tag{25}$$

如果继续于定理 3 或定理 4 中赋以 $\{x_i\}$ 为一些特殊的数列,则还可以得到更多的初等恒等式;同样,如果在定理 5 或定理 6 中取其它一些具体的等差数列,则还可以得到更多有趣的组合恒等式.囿于篇幅,在此不多赘述,但以上讨论充分说明了这样一个事实:如果我们站在高等数学的高处,利用高等数学的思想和方法处理某些初等数学问题是极为简洁的,而且易于揭于问题的本质。

参 考 文 献

- [1] 李仲来, I · J · Matrix 定理及推广, 数学通报, 6(1988);
- [2] 朱玉扬, I · J · Matrix 定理的再推广, 数学通报, 9(1991);
- [3] 杨正义, I · J · Matrix 定理两个推广的简证, 数学通报, 1(1993);
- [4] 张禾瑞, 郝尔新, 高等代数, 北京: 高等教育出版社, 1984;
- [5] 庞金彪, 鹿琳, 范德蒙行列式的推广及其在教学中的应用, 数学通报, 11, (1992)。