Yff 点

何万程

2023 年 1 月 15 日

定义 1. 给定 $\triangle ABC$，点 A'、B'、C' 分别在直线 BC、CA、AB 上，直线 AA'、BB'、CC' 相交于同一点 P，且 $BA' = CB' = AC'$ 或 $CA' = AB' = BC'$，这样的点 P 称为 $\triangle ABC$ 的 Yff 点．若 $BA' = CB' = AC' = u$，则点 P 称为 $\triangle ABC$ 的正 Yff 点，u 称为 $\triangle ABC$ 的正 Yff 值；若 $CA' = AB' = BC'$，则点 P 称为 $\triangle ABC$ 的负 Yff 点，u 称为 $\triangle ABC$ 的负 Yff 值.

设 $\triangle ABC$ 中，$BC = a$，$CA = b$，$AB = c$，$a = u + v$，$b = t + v$，$c = t + u$，$p = \dfrac{a+b+c}{2}$．由 Ceva 定理，无论正 Yff 点或负 Yff 点，Yff 值 u 都满足方程

$$u^3 = (a-u)(b-u)(c-u),$$

整理得

$$2u^3 - (a+b+c)u + (ab+ac+bc)u - abc = 0. \tag{1}$$

令 $f(u) = 2u^3 - (a+b+c)u + (ab+ac+bc)u - abc$，则 $f'(u) = 6u^2 - 2(a+b+c)u + ab + ac + bc$，方程 $f'(u) = 0$ 的判别式是

$$\begin{aligned}(2(a+b+c))^2 - 4\times 6\cdot(ab+ac+bc) &= 4(a^2+b^2+c^2-4(ab+ac+bc))\\ &= -8(t^2+u^2+v^2+5(tu+tv+uv)) < 0,\end{aligned}$$

所以对任意实数 u 均有 $f'(u) > 0$，即 $f(u)$ 是严格单调增函数．另外，因为 $f(0) = -abc < 0$，$f(a) = a^3$，$f(b) = b^3$，$f(c) = c^3$，所以 (1) 有唯一的正根，且小于 $\min\{a,b,c\}$，所以

$$u^3 = (a-u)(b-u)(c-u) \leqslant \left(\frac{(a-u)+(b-u)+(c-u)}{3}\right)^3 = \left(\frac{2p-3u}{3}\right)^3,$$

由上式得

$$u \leqslant \frac{2p-3u}{3},$$

即

$$u \leqslant \frac{p}{3}.$$

当且仅当 $a = b = c$ 时取得等号．由此可得：

定理 1. $\triangle ABC$ 的的正、负 Yff 点都在 $\triangle ABC$ 内，正、负 Yff 值 u 相等，且 $0 < u \leqslant \dfrac{p}{3}$，当且仅当 $\triangle ABC$ 是正三角形时 $u = \dfrac{p}{3}$.

设 $\triangle ABC$ 的正 Yff 点是 U_1，其重心坐标是 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$，$\triangle ABC$ 的正 Yff 点是 U_2，其重心坐标是 $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$．解由

$$\frac{\beta_1}{\gamma_1} = \frac{a-u}{u},\ \frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \frac{b-u}{u},\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 1$$

组成的方程组可得

$$\alpha_1=\frac{u^2}{u^2-au+ab},\ \beta_1=\frac{(a-u)(b-u)}{u^2-au+ab},\ \gamma_1=\frac{u(b-u)}{u^2-au+ab},$$

即

$$(u^2-au+ab)\alpha_1-u^2=0.$$

计算多项式 $f(u)$ 及 $(u^2-au+ab)\alpha_1-u^2$ 关于 u 的结式，整理得

$$ab^2(p_3(a,b,c)\alpha_1^3+p_2(a,b,c)\alpha_1^2+p_1(a,b,c)\alpha_1+p_0(a,b,c)),$$

其中

$$\begin{aligned}
p_3(a,b,c)&=ab^2+bc^2+ca^2-3abc,\\
p_2(a,b,c)&=a^2b-2bc^2-a(b^2+c^2)+3abc,\\
p_1(a,b,c)&=a^2(b-c)+c^2(2a+b),\\
p_0(a,b,c)&=-ac^2,
\end{aligned}$$

所以 α_1 满足方程

$$p_3(a,b,c)\alpha_1^3+p_2(a,b,c)\alpha_1^2+p_1(a,b,c)\alpha_1+p_0(a,b,c)=0,$$

同理可得 β_1、γ_1 分别满足方程

$$\begin{aligned}
p_3(b,c,a)\beta_1^3+p_2(b,c,a)\beta_1^2+p_1(b,c,a)\beta_1+p_0(b,c,a)=0,\\
p_3(c,a,b)\gamma_1^3+p_2(c,a,b)\gamma_1^2+p_1(c,a,b)\gamma_1+p_0(c,a,b)=0.
\end{aligned}$$

解由

$$\frac{\gamma_2}{\beta_2}=\frac{a-u}{u},\ \frac{\alpha_2}{\gamma_2}=\frac{b-u}{u},\ \alpha_2+\beta_2+\gamma_2=1$$

组成的方程组可得

$$\alpha_2=\frac{(a-u)(b-u)}{u^2-bu+ab},\ \beta_2=\frac{u^2}{u^2-bu+ab},\ \gamma_2=\frac{u(a-u)}{u^2-bu+ab},$$

用类似求 α_1、β_1、γ_1 方程的方法，可得 α_2、β_2、γ_2 分别满足方程

$$\begin{aligned}
p_3(a,c,b)\alpha_2^3+p_2(a,c,b)\alpha_2^2+p_1(a,c,b)\alpha_2+p_0(a,c,b)=0,\\
p_3(b,a,c)\beta_2^3+p_2(b,a,c)\beta_2^2+p_1(b,a,c)\beta_2+p_0(b,a,c)=0,\\
p_3(c,b,a)\gamma_2^3+p_2(c,b,a)\gamma_1^2+p_2(c,b,a)\gamma_2+p_0(c,b,a)=0.
\end{aligned}$$

通过计算 α_1、β_1、γ_1、α_2、β_2、γ_2 所满足的一元三次方程的判别式可知 α_1、β_1、γ_1、α_2、β_2、γ_2 所满足的一元三次方程均只有一个实数解，但是计算过程很繁琐，这里就不写详细计算过程了.

当 $\triangle ABC$ 是正三角形时得 $u=\dfrac{a}{2}$，并且正、负 Yff 点重合，以下讨论 $\triangle ABC$ 非正三角形的情形. 由

$$\begin{aligned}
\alpha_1=\frac{u^2}{u^2-au+ab},\ \beta_1=\frac{(a-u)(b-u)}{u^2-au+ab},\ \gamma_1=\frac{u(b-u)}{u^2-au+ab},\\
\alpha_2=\frac{(a-u)(b-u)}{u^2-bu+ab},\ \beta_2=\frac{u^2}{u^2-bu+ab},\ \gamma_2=\frac{u(a-u)}{u^2-bu+ab},
\end{aligned}$$

简单计算可得

$$\alpha_1-\alpha_2=\frac{a(2u^3-(a+2b)u^2+(2ab+b^2)u-ab^2)}{(u^2-au+ab)(u^2-bu+ab)},$$

$$
\begin{aligned}
&\beta_1-\beta_2=-\frac{b(2u^3-(2a+b)u^2+(a^2+2ab)u-a^2b)}{(u^2-au+ab)(u^2-bu+ab)},\\
&\gamma_1-\gamma_2=-\frac{(a-b)u(2u^2-(a+b)u+ab)}{(u^2-au+ab)(u^2-bu+ab)},\\
&(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2)+(\gamma_1-\gamma_2)=0.
\end{aligned}
$$

当 $\alpha_1-\alpha_2=0$ 时得 $2u^3-(a+2b)u^2+(2ab+b^2)u-ab^2=0$，此时

$$(2u^3-(a+2b)u^2+(2ab+b^2)u-ab^2)-f(u)=-(b-c)(a-u)(b-u)=0,$$

由此可得 $b=c$，而

$$(2u^3-(2a+b)u^2+(a^2+2ab)u-a^2b)-f(u)=-(a-c)(a-u)(b-u)\neq 0,$$

由此得 $(\alpha_1-\alpha_2):(\beta_1-\beta_2):(\gamma_1-\gamma_2)=0:1:(-1)$．当 $\alpha_1-\alpha_2\neq 0$ 时，设 $x=\dfrac{\beta_1-\beta_2}{\alpha_1-\alpha_2}$，由

$$x=\frac{-\dfrac{b(2u^3-(2a+b)u^2+(a^2+2ab)u-a^2b)}{(u^2-au+ab)(u^2-bu+ab)}}{\dfrac{a(2u^3-(a+2b)u^2+(2ab+b^2)u-ab^2)}{(u^2-au+ab)(u^2-bu+ab)}}=-\frac{b(2u^3-(2a+b)u^2+(a^2+2ab)u-a^2b)}{a(2u^3-(a+2b)u^2+(2ab+b^2)u-ab^2)}$$

得

$$a(2u^3-(a+2b)u^2+(2ab+b^2)u-ab^2)x+b(2u^3-(2a+b)u^2+(a^2+2ab)u-a^2b)=0,$$

计算多项式 $f(u)$ 及 $a(2u^3-(a+2b)u^2+(2ab+b^2)u-ab^2)x+b(2u^3-(2a+b)u^2+(a^2+2ab)u-a^2b)$ 关于 u 的结式，整理得

$$2a^3b^3(a(b-c)x-b(c-a))^3,$$

由此可得

$$a(b-c)x-b(c-a)=0,$$

即

$$\frac{\beta_1-\beta_2}{\alpha_1-\alpha_2}=x=\frac{b(c-a)}{a(b-c)},$$

同理可得

$$\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\alpha_1-\alpha_2}=\frac{c(a-b)}{a(b-c)},$$

由此得

$$(\alpha_1-\alpha_2):(\beta_1-\beta_2):(\gamma_1-\gamma_2)=a(b-c):b(c-a):c(a-b),$$

上面的比例式子容易验证对 $\alpha_1-\alpha_2=0$ 时仍成立．令 $\alpha_1-\alpha_2=a(b-c)k$，$\beta_1-\beta_2=b(c-a)k$，$\gamma_1-\gamma_2=c(a-b)k$，当 $b\neq c$ 时由

$$a(b-c)k=\frac{a(2u^3-(a+2b)u^2+(2ab+b^2)u-ab^2)}{(u^2-au+ab)(u^2-bu+ab)}$$

得

$$a(b-c)(u^2-au+ab)(u^2-bu+ab)k-a(2u^3-(a+2b)u^2+(2ab+b^2)u-ab^2)=0,$$

计算多项式 $f(u)$ 及 $a(b-c)(u^2-au+ab)(u^2-bu+ab)k-a(2u^3-(a+2b)u^2+(2ab+b^2)u-ab^2)$ 关于 u 的结式，整理得

$$b^3c^3(b-c)^3((ab^2+bc^2+ca^2-3abc)g(k),$$

其中

$$g(k)=(ab^2+bc^2+ca^2-3abc)(a^2b+b^2c+c^2a-3abc)k^3$$
$$+(ab+ac+bc)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)k^2+(a+b+c)^2k+4,$$

所以

$$g(k)=0, \tag{2}$$

当 $b=c$ 时用 $\beta_1-\beta_2=b(c-a)k$ 的式子，再利用类似的方法同样得到 (2)，所以无论那种情形 (2) 都成立．设

$$q_1(m)=a^m+b^m+c^m,$$
$$q_2(m)=a^mb^mc^m,$$
$$q_3(m)=a^mb^m+a^mc^m+b^mc^m,$$
$$q_4(m,n)=a^mb^n+a^nb^m+a^mc^n+a^nc^m+b^mc^n+b^nc^m,$$

(2) 整理成

$$\left(k+\frac{(ab+ac+bc)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}{3(ab^2+bc^2+ca^2-3abc)(a^2b+b^2c+c^2a-3abc)}\right)^3$$
$$+P\left(k+\frac{(ab+ac+bc)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}{3(ab^2+bc^2+ca^2-3abc)(a^2b+b^2c+c^2a-3abc)}\right)+Q=0,$$

其中

$$P=-\frac{(q_3(2)-q_2(1)q_1(1))(q_1(4)-5q_4(3,1)-3q_3(2)+12q_1(1)q_1(1))}{3(ab^2+bc^2+ca^2-3abc)^2(a^2b+b^2c+c^2a-3abc)^2},$$
$$Q=\frac{q(a,b,c)}{27(ab^2+bc^2+ca^2-3abc)^3(a^2b+b^2c+c^2a-3abc)^3},$$
$$q(a,b,c)=2q_4(9,3)-15q_4(8,4)+3q_4(7,5)+94q_3(6)-3q_2(1)q_4(8,1)-9q_2(1)q_4(7,2)$$
$$+267q_2(1)q_4(6,3)-633q_2(1)q_4(5,4)+111q_2(2)q_1(6)-594q_2(2)q_4(5,1)-345q_2(2)q_4(4,2)$$
$$+4695q_2(2)q_3(3)+4519q_2(3)q_1(3)-7152q_2(3)q_4(2,1)+22617q_2(4),$$

因为

$$\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3$$
$$=-\frac{(q_1(3)-6q_4(2,1)+33q_2(1))^2(q_4(4,2)-6q_3(3)-2q_2(1)q_1(3)+8q_2(1)q_4(2,1)-57q_2(2))}{108(ab^2+bc^2+ca^2-3abc)^4(a^2b+b^2c+c^2a-3abc)^4},$$

而

$$q_4(4,2)-6q_3(3)-2q_2(1)q_1(3)+8q_2(1)q_4(2,1)-57q_2(2))=-4Q',$$

其中

$$Q'=t^6+u^6+v^6+5(t^4u^2+t^2u^4+t^4v^2+t^2v^4+u^4v^2+u^2v^4)+14(t^3u^3+t^3v^3+u^3v^3)$$
$$+14tuv(t^3+u^3+v^3)+40tuv(t^2u+tu^2+t^2v+tv^2+u^2v+uv^2)+75t^2u^2v^2,$$

所以

$$\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3<0,$$

即 (2) 有且只有一个实数解.

设 $\triangle ABC$ 的面积是 S，外心是 O，外接圆半径是 R，内心是 I，内切圆半径是 r，则 O、I 的重心坐标分别是

$$\left(\frac{a^2(-a^2+b^2+c^2)}{16S^2},\frac{b^2(a^2-b^2+c^2)}{16S^2},\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{16S^2}\right),$$
$$\left(\frac{a}{a+b+c},\frac{b}{a+b+c},\frac{c}{a+b+c}\right),$$

所以

$$\overrightarrow{IO}=t_1\overrightarrow{AB}+t_2\overrightarrow{AC},$$

其中

$$t_1=\frac{b(a^3-a(b^2+c^2)-(a-b)^2c+c^3)}{16S^2},\ t_2=\frac{c(a^3-a(b^2+c^2)-(a-c)^2b+b^3)}{16S^2},$$

而

$$\overrightarrow{U_1U_2}=-(\beta_1-\beta_2)\overrightarrow{AB}-(\gamma_1-\gamma_2)\overrightarrow{AC},$$

由此可得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IO}\cdot\overrightarrow{U_1U_2}&=-(\beta_1-\beta_2)t_1\overrightarrow{AB}^2-(\gamma_1-\gamma_2)t_2\overrightarrow{AC}^2-((\beta_1-\beta_2)t_2+(\gamma_1-\gamma_2)t_1)\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=-(\beta_1-\beta_2)t_1c^2-(\gamma_1-\gamma_2)t_2b^2-((\beta_1-\beta_2)t_2+(\gamma_1-\gamma_2)t_1)\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\\&=-\frac{c(a-b)(\beta_1-\beta_2)-b(c-a)(\gamma_1-\gamma_2)}{2}=0,\end{aligned}$$

所以 $IO\perp U_1U_2$. 又因为

$$\begin{aligned}U_1U_2^2&=-(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)c^2-(\alpha_1-\alpha_2)(\gamma_1-\gamma_2)b^2-(\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2)b^2\\&=q_2(1)(q_1(3)-q_4(2,1)+3q_2(1))k^2,\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}q_1(3)-q_4(2,1)+3q_2(1)&=t^2u+tu^2+t^2v+tv^2+u^2v+uv^2-6tuv\\&\geqslant 6\sqrt[6]{t^2u\cdot tu^2\cdot t^2v\cdot tv^2\cdot u^2v\cdot uv^2}-6tuv=0,\end{aligned}$$

上不等式当且仅当 $t=u=v$，即 $\triangle ABC$ 是正三角形时取得等号，所以 $q_1(3)-q_4(2,1)+3q_2(1)>0$. 设 $U_1U_2^2=x$，则

$$k=\pm\sqrt{\frac{x}{q_2(1)(q_1(3)-q_4(2,1)+3q_2(1))}},$$

经计算得

$$\begin{aligned}&g\left(\sqrt{\frac{x}{q_2(1)(q_1(3)-q_4(2,1)+3q_2(1))}}\right)g\left(-\sqrt{\frac{x}{q_2(1)(q_1(3)-q_4(2,1)+3q_2(1))}}\right)\\&=\frac{l(x)}{q_2(1)^3(q_1(3)-q_4(2,1)+3q_2(1))^3},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}l(x)=&(ab^2+bc^2+ca^2-3abc)^2(a^2b+b^2c+c^2a-3abc)^2x^3\\&-q_2(1)(q_1(3)-q_4(2,1)+3q_2(1))l_1'x^2+q_2(2)(q_1(3)-q_4(2,1)+3q_2(1))^2l_2'x\\&-16q_2(3)(q_1(3)-q_4(2,1)+3q_2(1))^3,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
l_1' &= q_4(6,2) - 4q_4(5,3) - q_3(4) - 2q_2(1)q_4(4,1) + 14q_2(1)q_4(3,2) - 5q_2(2)q_1(2) - 12q_2(2)q_3(1),\\
l_2' &= q_1(4) - 4q_4(3,1) + 14q_3(2) + 20q_2(1)q_1(1),
\end{aligned}
$$

所以

$$l(x) = 0. \tag{3}$$

考察方程

$$g\left(\sqrt{\frac{x}{q_2(1)(q_1(3) - q_4(2,1) + 3q_2(1))}}\right) = 0, \tag{4}$$

$$g\left(-\sqrt{\frac{x}{q_2(1)(q_1(3) - q_4(2,1) + 3q_2(1))}}\right) = 0, \tag{5}$$

因为 $g(k) = 0$ 仅有一个实数解，所以当 $k > 0$ 时 (4) 有非负数解而 (5) 无非负数解，当 $k < 0$ 时 (4) 无非负数解而 (5) 有非负数解，当 $k = 0$ 时 (4) 及 (5) 只有实数解 0，由此可知 (3) 仅有一个非负数解．令

$$y = \left(\frac{4uS \cdot IO}{u^3 + abc}\right)^2,$$

S、IO 用 a、b、c 表示，整理得

$$(u^3 + abc)^2 y - q_2(1)(q_1(3) - q_4(2,1) + 3q_2(1))u = 0$$

计算多项式 $f(u)$ 及 $(u^3 + abc)^2 y - q_2(1)(q_1(3) - q_4(2,1) + 3q_2(1))u$ 关于 u 的结式，整理得

$$a^2b^2c^2 l(y),$$

由此可得

$$l(y) = 0,$$

又因为 (3) 仅有一个非负数解，所以 $x = y$，即

$$U_1U_2 = \frac{4uS \cdot IO}{u^3 + abc}.$$

由此可得：

定理 2. $IO \perp U_1U_2$，且 $U_1U_2 = \dfrac{4uS \cdot IO}{u^3 + abc}$.