简短的说明

前言

日期

待续

网友 Tesla35

2014 年 12 月 16 日

§1 阶及其应用

1. 求 5 模 21 的阶.
2. 求 18 模 25 的阶.
3. 求 77 模 27 的阶.
4. 求 3 模 10^4 的阶.
5. 设 $n \geqslant 1$, 证明:2 模 5^n 的阶是 $\varphi(5^n) = 4 \times 5^{n-1}$.
6. 设 $n > 1, n \mid (2^n + 1)$, 证明： $3 \mid n$.
7. 设 $n > 1$, 证明: $n \nmid (2^n - 1)$.
8. 设 n 是正整数, 证明: $2^{2^n} + 1$ 的任一素因子具有形式 $2^{n+1}x + 1$,x 是正整数.
9. 证明: Fermat 数 $F_k = 2^{2^k} + 1 (k \geqslant 0)$ 的任一个约数 $\equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$.
10. 证明, 对任何整数 $k > 0$, 都存在正整数 n, 使得 $2^k \mid (3^n + 5)$.
11. 证明, 若整数 $n > 1$, 则 $n \nmid (3^n - 2^n)$.
12. 设 a 和 m 都是正整数,$a > 1$. 证明:$m \mid \varphi(a^m - 1)$.
13. 设 p 是奇素数, 证明: $2^p - 1$ 的任一素因子具有形式 $2px + 1$,x 是正整数.
14. 设 p 是奇素数, 证明: $2^p + 1$ 的任素因子或者是 3, 或者具有形式 $2px + 1$,x 是正整数.
15. 设 $a > 1$ 是整数,p 是奇素数. 证明: $a^p - 1$ 的素因子或者整除 $a - 1$, 或者具有形式 $2px + 1$(x 是正整数).

由此推出,$\dfrac{a^p - 1}{a - 1}$ 的素因子或者是 p, 或者具有形式 $2px + 1$(x 是正整数).

16. 是否存在 $n \in \mathbb{N}^+$, 使得 $103 \mid n, 2^{2n+1} \equiv 2 \pmod{n}$ 成立? (2010 印度国家队选拔考试)

§2　二次剩余

1. 求证:$1,2,\cdots,\dfrac{p-1}{2}$ 中模 p 的二次非剩余的个数为 $\displaystyle\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\left[\frac{2j^2}{p}\right]-2\left[\frac{j^2}{p}\right]\right)$.

2. 求证: 形如 $8n+1,8n+3,8n+5,8n+7$ 的素数均有无穷多个.(当然, 不能使用 Dirichlet 定理)

3. 素数 $p\equiv 1\pmod 8$, 正整数 a 满足 $(\dfrac{a}{p})=1$. 若已知 b 满足 $(\dfrac{b}{p})=-1$, 求同余方程 $x^2\equiv a\pmod p$ 的解.

4. 设素数 $p\geqslant 3$,$p\nmid a$. 若 b,c 为整数, 求证:

$$\sum_{x=1}^{p}(\frac{ax^2+bx+c}{p})=\begin{cases}-(\dfrac{a}{p}) & p\nmid b^2-4ac\\ (p-1)(\dfrac{a}{p}) & p\mid b^2-4ac\end{cases}$$

5. 已知 p 为素数, 设 $g=\displaystyle\sum_{a=1}^{p-1}\zeta_p^a(\frac{a}{p})$, 其中 ζ_p 是 p 次本原单位根 (即对任意的 $1\leqslant i<p$, 有 $\zeta_p^i\neq 1$). 求证:$g^2=(-1)^{\frac{p-1}{2}}p$

6. 证明: 对任意素数 p, 存在整数 a,b,c,d 使 $x^4+1\equiv(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)\pmod p$.

7. 求证:

(a) 设 p 是奇素数,k 为正整数, 则同余方程 $x^2\equiv a\pmod{p^k}$ 有解的充要条件是 $(\dfrac{a}{p})=1$.

(b) 设 a 为奇数, 则同余方程 $x^2\equiv a\pmod{2^k}(k\geqslant 3)$ 有解的充要条件 $a\equiv 1\pmod 8$.

8. 设 m 为正整数, 求证:$(2^{m+1}+1)\mid(3^{2^m}+1)$ 的充要条件是 $2^{m+1}+1$ 是素数.

9. 求正整数 n 可以表示为 $n=x^2+2y^2(x,y\in\mathbf{Z})$ 的充要条件.

10. 给定一个非负整数 n 和一个质数 $p\equiv 7\pmod 8$, 求证:$\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}\left\{\frac{k^{2n}}{p}+\frac{1}{2}\right\}=\frac{p-1}{2}$. (其中 $\{x\}=x-[x]$)

11. 定义 $a+b\sqrt{D}\equiv 0\pmod p\Leftrightarrow a\equiv b\equiv 0\pmod p$, 其中 a,b 为整数, D 为正整数且非完全平方数. 若 $(\dfrac{D}{p})=-1$, 求证:$(a+\sqrt{D}b)^{p^2-1}\equiv 0,1\pmod p$.

12. 有一个正整数的无穷等差数列, 其中有一项形如 x^m, 且有另一项形如 y^n. 这里 x,y,m,n 均为正整数, 且 $(m,n)=1$. 求证: 此数列中含有一项形如 z^{mn}(z 为正整数).

(link)

§3 Gauss 函数 $[x]$ 与 $\{x\}$

1. 设 $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, 则 $[\alpha^{16}]=$________. (2008 五羊杯数学竞赛 (初三))

2. 计算 $\left[\sqrt{2008+\sqrt{2008+\cdots+\sqrt{2008}}}\right]$ 的值 (2008 共出现了 2008 次). (2008 年青少年国际城市邀请赛)

3. 设 $S=\dfrac{1}{\left[\frac{(10\times11-1)^2}{10\times11}\right]}+\dfrac{1}{\left[\frac{(11\times12-1)^2}{11\times12}\right]}+\cdots+\dfrac{1}{\left[\frac{(49\times50-1)^2}{49\times50}\right]}$. 则 $[30S]=$

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 0 .

(2002 五羊杯数学竞赛 (初二))

4. 代数式 $[\sqrt[3]{1\times2\times3}]+[\sqrt[3]{2\times3\times4}]+\cdots+[\sqrt[3]{2000\times2001\times2002}]=$

(A) 2000000; (B) 2001000; (C) 2002000; (D) 2003001 . (2000 五羊杯数学竞赛 (初三))

5. 计算 $\left[\dfrac{23\times1}{101}\right]+\left[\dfrac{23\times2}{101}\right]+\cdots+\left[\dfrac{23\times100}{101}\right]$ 的值.

6. 方程 $6x-3[x]+7=0$ 的解是________. (第 21 届希望杯数学邀请赛 (初二))

7. 方程 $[2x]+[3x]=9x-\dfrac{7}{4}$ 的所有实数解为________. (2010 全国初中数学联赛武汉赛区预赛)

8. 设 a 是有理数. 则下面四个结论中, 正确的是

(A) $[a]+[-a]=0$;

(B) $[a]+[-a]=0$ 或 1;

(C) $[a]+[-a]\neq0$;

(D) $[a]+[-a]=0$ 或 -1 . (第 17 届希望杯数学邀请赛 (初一))

9. 已知 $0<a<1$, 且 $\left[a+\dfrac{1}{30}\right]+\left[a+\dfrac{2}{30}\right]+\cdots+\left[a+\dfrac{29}{30}\right]=18$. 则 $[10a]$ 等于________. (2009 年北京市数学竞赛 (初二))

10. 已知正整数 n 小于 2006, 且 $\left[\dfrac{n}{3}\right]+\left[\dfrac{n}{6}\right]=\dfrac{n}{2}$. 则这样的 n 有________ 个. (2006 全国初中数学竞赛)

11. 在一列数 $x_1,x_2,\cdots$ 中, 已知 $x_1=1$, 且当 $k\geqslant2$ 时,

$$x_k=x_{k-1}+1-4\left(\left[\frac{k-1}{4}\right]-\left[\frac{k-2}{4}\right]\right).$$

则 $x_{2010}=$

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4 . (2010 数学周报杯全国初中数学竞赛)

12. 代数式 $[(\sqrt{6}+\sqrt{5})^6]=$________. (2004 五羊杯数学竞赛 (初三))

13. 满足 $25\{x\}+[x]=125$ 的所有实数 x 的和是________. (2007 青少年数学国家城市邀请赛)

14. 在 1000! 的十进制展开中, 末尾有多少个 0?

15. 求证组合数

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\ (k=0,1,\cdots,n)$$

是一个整数.

16. 设 n 是任何正整数. 求证: 表达式

$$(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)2n$$

能被 2^n 整除.

17. 求证:2^{n-1} 能整除 $n!$ 的充要条件是存在正整数 k 使得 $n=2^{k-1}$. (第十七届加拿大数学竞赛试题,1985)

18. 求证: 二项式系数 C_{2n}^{n} 整除 $1,2,3,\cdots,2n$ 这些数的最小公倍数, 其中 n 是正整数. (1985 年 IMO 预选题, 保加利亚供题)

19. p 为素数,n 为正整数. 求证

$$C_{p^n}^1, C_{p^n}^2, \cdots, C_{p^n}^{p^n-1}$$

都可以被 p 整除.

20. 求证: 对任何实数 x,y 都有

$$[2x]+[2y]\geqslant [x]+[x+y]+[y].$$

21. (a) 求证:$[5x]+[5y]\geqslant[3x+y]+[3y+x]$, 其中 $x,y\geqslant 0$.
(b) 求证: 对一切正整数 m,n

$$\frac{(5m)!(5n)!}{m!n!(3m+n)!(3n+m)!}$$

是整数. (第四届美国数学奥林匹克)

22. x 为实数,n 为正整数, 求证

$$[nx]\geqslant \frac{[x]}{1}+\frac{[2x]}{2}+\cdots+\frac{[nx]}{n}.$$

23. 求证方程

$$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$$

无实数解. (第十三届加拿大数学竞赛试题,1981)

24. 设 N 为一正整数, 问方程

$$x^2-[x^2]=(x-[x])^2$$

在 $[1,N]$ 中有多少解?

25. Hermite 恒等式: 对正整数 n 及一切实数 x, 求证:

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$

26. $t>1$ 是一个整数,x 为一实数. 求证:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left[\frac{x+t^k}{t^{k+1}}\right]+\left[\frac{x+2t^k}{t^{k+1}}\right]+\cdots+\left[\frac{x+(t-1)t^k}{t^{k+1}}\right]\right)=\begin{cases}[x], & x\geqslant 0,\\ [x]+1, & x<0.\end{cases}$$

27. 计算和式

$$\sum_{n=0}^{502}\left[\frac{305n}{503}\right]$$

之值.(首届东北三省数学邀请赛,1986)

28. 对于任意正整数 n, 计算下列和式

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right].$$

29. 设 $x\geqslant 0$. 求证 $\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]$.

30. 设 n 是大于 2 的任意正整数, 求证

$$\left[\frac{n(n+1)}{4n-2}\right]=\left[\frac{n+1}{4}\right].$$

31. 对任何正整数 n, 求证

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}].$$

(第八届 Putnam 大学生数学竞赛,1984)

32. 在前 1000 个正整数中, 有多少个可以写成

$$[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$$

的形式? 其中 x 为实数. (第三届美国数学邀请赛,1985)

33. 在整数数列

$$\left[\frac{1^2}{1980}\right],\left[\frac{2^2}{1980}\right],\left[\frac{3^2}{1980}\right],\cdots,\left[\frac{1980^2}{1980}\right]$$

中, 包含着多少个互不相等的整数? (苏联列宁格勒中学生数学竞赛,1980)

34. 设 n 为任意固定的正整数. 求证: 数列

$$1+\left[\frac{n}{1}\right],2+\left[\frac{n}{2}\right],3+\left[\frac{n}{3}\right],4+\left[\frac{n}{4}\right],\cdots$$

中的最小值可以表示为 $[\sqrt{4n+1}]$.

35. 试确定 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1980}$ 的小数点前一位数字和后一位数字. (芬兰等欧洲四国数学竞赛,1980)

36. 用 $a_n=[n\sqrt{2}],n=1,2,3,\cdots$ 定义一个无穷正整数数列. 求证: 在这个数列中, 有无穷多个项是 2 的整数次幂. (1985 年 IMO 预选题, 罗马尼亚供题)

37. 当 n 是怎样的最小自然数时, 方程 $\left[\dfrac{10^n}{x}\right]=1989$ 有整数解? (第二十三届全苏数学竞赛)

38. 解方程 $4x^2-40[x]+51=0$.

39. 解方程 $x^3-[x]=3$.(第二十届莫斯科数学竞赛)

40. 试求正整数 $\left[\dfrac{10^{93}}{10^{31}+3}\right]$ 的末两位数字.

41. 解方程 $8[3x]-5[2x]=3$.

42. 求所有自然数 n, 使得

$$\min_{k\in\mathbb{N}^+}\left(k^2+\left[\frac{n}{k^2}\right]\right)=1991.$$

(1991 年中国数学奥林匹克)

43. 设正实数 $a>1$, 自然数 $n\geqslant 2$, 且方程 $[ax]=x$ 恰有 n 个不同的解. 求 a 的取值范围. (1992 四川省高中数学竞赛)

44. 求使 $[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 n]=1994$ 成立的正整数 n. (1994 年美国数学邀请赛)

45. 对于非负整数 x, 函数 $f(x)$ 定义如下:

$$f(x)=0\ f(x)=f\left(\left[\frac{x}{10}\right]\right)+\left[\lg\frac{10}{x-10\left[\frac{x-1}{10}\right]}\right].$$

$f(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1996$ 中取最大值时,x 的值是多少? (1996 年日本数学奥林匹克)

46. 从 992 到 1992 的整数中, 有多少个是 7 的倍数? 如果 $7^k\mid 992\cdot 993\cdot\cdots\cdot 1992$, 求最大的正整数 k.

47. 证明 $(n!)^{(n-1)!}$ 整除 $(n!)!$.

48. p 是素数,$a_i\in\mathbb{Z},0\leqslant a_1<p,i=1,2,\cdots,k;n=a_0+a_1p+\cdots+a_kp^k$, 求 $p(n!)$.

49. 求数列 $1,2,2,3,3,3,\cdots,\underbrace{k,k,\cdots,k}_{k个},\cdots$ 的通项公式.

50. 求和 $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{n^2-1}]$.

51. 求和 $\sum_{N=1}^{1024}[\log_2 N]$.

52. 求函数 $y=kx-[kx+b](k,b$ 为常数,$k\neq 0)$ 的值域.

53. 解方程 $3x-[x]=\frac{7}{3}$.

54. 解方程 $\left[\frac{1+x}{2}\right]+[1-2x]=0$.

55. 解方程 $[x^2]-[x]-2=0$.

56. 解方程 $[x]+[2x]+[3x]+[4x]+[5x]=2001$.

57. 若实数 λ 使 $\{\lambda\}+\left\{\frac{1}{\lambda}\right\}=1$, 求证 λ 是无理数.

58. 若 $m,n\in\mathbb{N}^+$, 证明:$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ 是一个整数.

59. 求所有的实数 x, 使得 $\left[\sqrt{n+x}+\frac{1}{2}\right]=\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$ 对一切正整数 n 都成立.

60. 满足等式 $[-1.999n]=[-1.999]n$ 的正整数 n 有多少个?

61. 解不等式 $4\{x\}[x]<6x-9$.

62. 若 $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ 为质数, 求自然数 n 的值.

63. 若 $1\times 2\times 3\times\cdots\times 2000=1001^n\cdot M$, 其中 n,M 是正整数, 求 n 的最大值.

64. 若实数 λ 满足 $\{\lambda^2\}+\{\lambda\}=1$. 求证:$\lambda$ 是无理数.

65. 求证: 不存在实数 x, 使等式:

$$[x]+[2x]+[3x]+[4x]+[5x]+[6x]=103$$

成立.

66. 在 $0\leqslant x\leqslant 2000$ 时, 求函数 $f(x)=[2x]+\left[\frac{5}{4}x\right]+[3x]$ 的值集的元素个数.

67. 求 $\left[\frac{8^{1000}}{8^{100}+2001}\right]$ 的个位数字.

68. 若 $n\in\mathbb{N}^+$, 求证:$\{\sqrt{2}n\}>\frac{1}{2\sqrt{2}n}$.

69. 求和:$\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1002001}}\right]$.

70. 求证:$m!(n!)^m\mid(mn)!$.

71. 利用 Hermite 恒等式, 求和:

(1)$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$

(2)$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left[\frac{n+3^k}{3^{k+1}}\right]+\left[\frac{n+2\cdot 3^k}{3^{k+1}}\right]\right)$.

72. 求出所有满足 $[x]^2=x\cdot\{x\}$ 的实数 x.

73. 设 n 是正整数, 证明

$$\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[\frac{n^2}{4}\right].$$

74. 设 a,b 是任意实数, 那么有

$$[a]-[b]=[a-b]\text{或}[a]-[b]=[a-b]+1.$$

75. 试求满足在 $n!$ 中质数 3 共出现 7 次的自然数 n.

76. 设 $r=\frac{4}{3}$, 试证明: 有无穷多个正整数 n 使 $[nr]$ 为质数.

§4　进位制

1. 设 $1990=2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n}$, 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为彼此两两不等的非负整数, 求 $a_1+a_2+\cdots+a_n=$?

2. 2^{1997} 的十进制表示是个 p 位数, 5^{1997} 的十进制表示是个 q 位数, 求 $p+q$.

3. 现有 1 克, 2 克, 4 克, 8 克, 16 克的砝码各一个, 问在天平上能称出多少种不同的重量?

4. 假定 1 千克, 2 千克, 4 千克的砝码各一个可以测量从 1 千克到 7 千克的重量, 那么, 需要增加三块多重的砝码才能测量从 1 千克到 63 千克的全部重量? 为什么?

5. 想办法将别针装成 10 包, 每包数量互不相等, 如果顾客买不超过 1000 枚的任意个数的别针都能在这 10 包中恰当地选取, 刚好凑成顾客要买的数目, 请你说明, 怎样的装法才能达到目的?

6. 请找出四个砝码, 使它能用一架天平称出 1~40 克间所有整数克的物体, 并说明理由.

7. 某铅笔厂对生产的铅笔进行包装后送往学校, 现有 448 支铅笔, 每 8 支铅笔装成一小盒, 每 8 小盒装成一大盒, 共可以装几大盒? 后来又增加了 35 支铅笔, 这时又变成了几小盒, 几大盒?

8. 用 $25_{(k)}$ 表示 k 进制的数, 如果 $52_{(k)}$ 是 $25_{(k)}$ 的两倍, 那么 $123_{(k)}$ 在十进制中表示的数是多少?

9. 证明:$2^{10}-2^8+2^6-2^4+2^2-1$ 能被 9 整除.

10. 将 1500 只产品分别装 15 箱出厂, 在包装密封完毕后, 发现还有 1 只产品未装入箱内. 请你设计一种办法, 只须称 4 次, 就可以把少装的 1 箱查出来.

11. 递增数列 $1,3,4,9,10,12,13,\cdots$ 是由一些正整数组成, 它们或是 3 的幂, 或是若个不同的 3 的幂之和, 求该数列的第 100 项.(第 4 届美国数学邀请赛试题)

12. 设 $\{a_n\}$ 是递增正整数数列 $1,7,8,49,50,56,57,\cdots$, 它们或者是 7 的幂或者是若干个 7 的不同幂之和, 则 $a_{1000}=$________.(2004 年全国高中数学联赛吉林赛区初赛)

13. 将各位数码不大于 3 的全体正整数 m 按自小到大的顺序排成一个数列 $\{a_n\}$, 则 $a_{2007}=$________. (2007 年全国高中数学联赛江西赛区预赛)

14. 试验室里有 243 瓶试剂, 而其中有一瓶是毒药, 现在有 5 只小白老鼠, 每只老鼠可以喝多瓶毒药, 但毒药的药效需要一天才能发作, 问至少可以用几天一定可以找出那瓶毒药.

15. 现有 1990 堆石头, 块数分别为 $1,2,\cdots,1990$, 进行如下操作, 每次可选择任意多堆, 从其中每堆拿走同样多的石块, 问要把所有石块拿走, 最少要做多少次?

16. 若规定 $E=\{a_1,a_2,\cdots,a_{10}\}$ 的子集 $\{a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n}\}$ 为 E 的第 k 个子集, 其中 $k=2^{i_1-1}+2^{i_2-1}+\cdots+2^{i_n-1}$, 则

(1) $\{a_1,a_2\}$ 是 E 的第_____ 个子集;

(2) E 的第 211 个子集是__________.(2010 湖北文)

17. 用 "十四进制" 表示数时, 满十四进前一位. 若在 "十四进制" 中, 把十四个数码从小到大依次记为 $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,J,Q,K$, 则在 "十四进制" 中的三位数 JQK 化成 "二进制" 数时应为 (　) 位数.

(A) 13;　　(B) 12;　　(C) 11;　　(D) 10 .

(2006 温州市高一数学竞赛)

18. 求满足 $\overline{abc}=(a+b+c)^3$ 的所有三位数 $\overline{abc}$.(1988 年上海市竞赛试题)

19. 一个四位数, 它的个位数字与百位数字相同. 如果将这个四位数的数字顺序颠倒过来 (即个位数字与千位数字互换, 十位数字与百位数字互换), 所得的新数减去原数, 所得的差为 7812, 求原来的四位数.(1979 年云南省竞赛题)

20. 1987 可以在 b 进制中写成三位数 $\overline{xyz}$, 如果 $x+y+z=1+9+8+7$, 试确定所有可能的 x,y,z 和 b. (1987 年加拿大数学竞赛试题)

21. 设 n 是五位数 (第一个数码不是零),m 是由 n 取消它的中间一个数码后所成的四位数, 试确定一切 n 使得 $\dfrac{n}{m}$ 是整数.(第 3 届加拿大数学竞赛试题)

22. 若 $n\in\{1,2,\cdots,100\}$ 且 n 是其各位数字和的倍数, 这样的 n 有多少个?(2004 年南昌竞赛试题)

23. 如果一个正整数 n 在三进制下表示的各数字之和可以被 3 整除, 那么我们称 n 为 "好的", 则前 2005 个 "好的" 正整数之和是多少?(2005 年中国奥林匹克协作体夏令营试题)

24. 记集合 $T=\{0,1,2,3,4,5,6\}$,$M=\{(a_1a_2a_3a_4)_{(7)}|a_i\in T,i=1,2,3,4\}$, 将 M 中的元素按从大到小的顺序排列, 则第 2008 个数是

(A) $1100_{(7)}$; (B) $1101_{(7)}$; (C) $5565_{(7)}$; (D) $5566_{(7)}$.

25. 设有集合 $A=\left\{\dfrac{a_1}{9}+\dfrac{a_2}{9^2}+\dfrac{a_3}{9^3}+\dfrac{a_4}{9^4}|a_i\in\{0,1,2,\cdots,8\},i=1,2,3,4\right\}$, 把 A 中各数按照从大到小的顺序排列, 求第 2010 个数.

26. 设 $P(x)$ 是 x 的十进制表示的各位数字之积, 求 $P(x)=x^2-10x-22$ 成立的正整数 x.

27. 证明: 对任意自然数 n, 二项式系数 $C_n^m(0\leqslant m\leqslant n)$ 中, 奇数的个数是 2 的幂. (1990 第 32 届 IMO 备选题)

28. 给定正整数 n, 已知用克数都是正整数的 k 块砝码和一台天平可以称出质量为 $1,2,3,\cdots,n$ 克的所有物品.

(1) 求 k 的最小值 $f(n)$;

(2) 当且仅当 n 取什么值时, 上述 $f(n)$ 块砝码的组成方式是唯一确定的? 并证明你的结论.(1999 年联赛)

29. 正整数 n 的 b 进制表示是 777, 求最小的正整数 b, 使得 n 是某一个整数的四次方.

30. 如果非负整数 m 及其各位数字之和均为 6 的倍数, 则称 m 为 "六合数". 求小于 2012 的非负整数中 "六合数" 的个数.(2012 东南赛, 陶平生供题)

31. 对于正整数 n, 令 $f_n=[2^n\sqrt{2008}]+[2^n\sqrt{2009}]$. 求证: 数列 $f_1,f_2,\cdots$ 中有无穷多个奇数和无穷多个偶数.([x] 表示不超过 x 的最大整数)(东南赛, 冯祖鸣供题)

§5 存在性问题

1. 求证: 对任意的正整数 k, 都存在无穷多个正整数 n, 使得 $n^2+k|n!$.

2. 求证: 存在无穷多个正整数 m, 使得 m,$m+1$,$m+2$ 都可以表示成 a^2+b^2 的形式, 其中 a,b 都是正整数.

3. 求证: 存在无穷多个正整数对 (a,b,c), 满足 a,b,c 构成等差数列, 且 $ab+1$,$bc+1$,$ca+1$ 都是完全平方数.

4. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是任意实数. 求证: 存在一个实数 x, 使得 $x+a_1,x+a_2,\cdots,x+a_n$ 都是无理数.

5. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 均为有理数, 并且有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\{k\alpha_i\}<\frac{n}{2}$ 对所有的正整数 k 成立. 试证明:$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中存在整数.

6. 称一个正整数 k 是" 好的", 如果至少有一个正整数 m 不能表示成 $m=\sum\limits_{i=1}^{2k}e_iz_i^k$ 的形式, 其中 z_i 为非负整数,$e_i=\pm1,i=1,2,\cdots,2k$. 求证: 有无穷多个正整数是" 好的".

7. 已知素数 p 不能整除 $a_i,b_i\in\{-1,1\}$,$(i=1,2,\cdots,p-1)$. 求证: 存在 $b_1,b_2,\cdots,b_{p-1}$, 使得 $p|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{p-1}b_{p-1}$.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=a_na_{n+1}+1$. 求证: 对任意正整数 k, 都存在正整数 $m>k$, 使得 $a_k^k|a_m^m$.

9. 一个正整数的集合 C 称为" 好集", 是指对任意正整数 k, 都存在 $a,b\in C(a\neq b)$, 使得 $(a+k,b+k)>1$. 求证: 如果一个" 好集"C 的元素之和为 2011, 则存在一个 $c\in C$, 使得集合 $C-\{c\}$ 仍是一个" 好集".

10. 求证: 对任意的正整数 k, 存在正整数 m 使得关于 n 的方程 $n+S(n)=m$ 恰有 k 个解.(其中 $S(n)$ 为十进制表示中 n 的各位数字之和)

11. 定义十进制数 $\overline{a_la_{l+1}\cdots a_n}$ 是 $\overline{a_1a_2\cdots a_n}$ 的" 后缀" $(1\leqslant l\leqslant n)$. 求证: 存在无穷多个正整数 n, 使得 n 是 2^n 的" 后缀".

12. 已知 p 是正整数, 且 $(p,10)=1$, 求证: 存在一个各位数码为 1 或 3 的 $p-2$ 位正整数能被 p 整除.

13. 已知 $f(x)$ 为整系数多项式, 且 $f(0)=0,gcd(f(1),f(2),\cdots)=1$. 求证: 存在无穷多个正整数 n, 使得 $gcd(f(n)-f(0),f(n+1)-f(1),f(n+2)-f(2),\cdots)=n$.

14. 已知 k 是大于 1 的正整数, 求证: 存在一个正整数 n, 以及 n 个两两不同的大于 1 的正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(a_i)$ 都是正整数的 k 次幂. 其中 $\varphi(n)$ 是 1 到 n 中与 n 互质的数的个数.

15. 设 X 是由正整数组成的一个有限集,$A\subseteq X,A\neq\varnothing$. 求证: 存在 X 的一个非空子集 B, 使得 A 恰由 X 中所有能整除 B 中奇数个元素的正整数组成.

(link)

16. 证明对于任意给定的正整数 n, 存在连续 n 个正整数都是合数.

17. 证明存在 1000 个连续正整数使得其中有 17 个质数.

18. 证明存在无穷多个奇数 m 使得 8^m+9m^2 是合数.

19. 证明连续四个整数的乘积不是一个完全平方数.

20. 证明存在无穷多个正整数, 使得其中任意多个不同的正整数的和不是平方数.

21. 证明存在无穷多个正整数 n 使得 $n|2^n+1$.

22. 证明存在无穷多个正整数 n 使得 $n|2^n+2$. (link)

23. 证明任意正整数 n 均可表示成 $a-b$ 的形式, 其中 a 和 b 均是整数并且素因子个数相同.

24. 证明不定方程 $x!y!=z!$ 有无穷多组正整数解 (x,y,z).

25. 证明对于每个正整数 n 均存在 n 个不同的正整数使得任取其中两个数 a,b 均有 $(a-b)|(a+b)$. (link)

26. 已知 a 为正有理数, 证明: 存在无穷多个正整数 n, 使得 $\sqrt{n+a}$ 为有理数. (link)

27. 证明: 形如 $2pn+1$ 的素数有无限多个. (link)

28. 证明: 存在无穷多个形如 $4n-1$ 的质数. (link)

29. 已知 a,b 互素且 a 为正数, 求证有无穷多个形如 $an+b$ 的素数存在. (link)

30. 求证: 存在无穷多个正整数, 使得数 n^2+1 没有形如 k^2+1 的正约数, 这里 k 是小于 n 的正整数. (link)

31. 证明: 存在无穷多个正整数 n 使得 $n^5+(n+1)^4$ 为合数. (link)

32. 对任意 $n\geqslant 2$, 证明: 存在 n 个连续正整数, 使它们都不是 p^q 的形式. 这里 p 是质数,p 是大于 1 的正整数.

33. 对任意 $n\geqslant 2$, 证明: 存在 n 个不同正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 使得

$$(a_i-a_j)\mid(a_i+a_j)(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$$

34. 证明: 可把正整数集 $\mathbb{N}^+$ 分拆成两个子集 A,B, 使得 A 中任 3 个数都不成等差数列, 而且不存在由 B 中无穷多个数构成的等差数列.

35. 对任意正整数 $n\geqslant 2$, 证明: 可以从集合 $M_n=\left\{1,2,3,\cdots,\dfrac{3^n+1}{2}\right\}$ 中取出 2^n 个数, 使其中任 3 个数不成等差数列.

36. 证明: 可以用 4 种颜色对正整数 $1,2,\cdots,2000$ 染色, 使它不含有由 7 个同色数组成的等差数列.

37. 设 $S=\{x|x\geqslant 0,$其 4 进制表示中只含$0,1\}$,x 是不属于 S 的任意非负实数. 求证: 存在 $y\in S$, 使 $\dfrac{x+y}{2}\in S$.

38. 证明: 存在两个严格递增数列 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$, 使 $a_n(a_n+1)\mid(b_n^2+1)(n=1,2,\cdots)$.

39. 证明:$\{2^n-3\}(n=2,3,\cdots)$ 中存在无穷子数列, 使其中的项两两互质.

40. 对任意正整数 $n\geqslant 2$, 证明: 存在 n 个不同自然数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 使满足 $(a_i+a_j)\mid a_1a_2\cdots a_n(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$.

41. 对任意正整数 $n\geqslant 2$, 证明: 平面直角坐标系中存在 n 个点, 它们中任意 3 点不共线, 且任意 $k(k=1,2,\cdots,n)$ 个点的重心为整点 (注:k 个点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_k,y_k)$ 的重心为点 $\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k},\dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_k}{k}\right)$).

42. 证明: 对任意质数 p, 存在无穷多个正整数 n, 使得 $p\mid 2^n-n$.

43. 证明: 存在无穷多个正整数 n, 使得 $n\mid 2^n+1$.

44. 对任意正整数 n, 证明: 存在 $n+1$ 个正整数 $k_0,k_1,\cdots,k_n$, 使对每个满足 $-\dfrac{3^{n+1}-1}{2}\leqslant a\leqslant\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$ 的整数 a, 可惟一地表示成

$$a=a_0k_0+a_1k_1+\cdots+a_nk_n.$$

这里 $a_i\in\{-1,0,1\}(i=0,1,\cdots,n)$.

45. 是否存在 1000000 个相继整数, 使得每一个都含有重复的素因子, 即都被某个素数的平方整除. (第 15 届 Putnam 数学竞赛)

46. 求证: 对任何正整数 n, 存在 n 个相继的正整数, 它们都不是素数的正整数幂. (第 30 届 IMO 试题)

47. 是否存在 21 个相继正整数, 其中每一个数均至少可被一个不小于 2 不大于 13 的素数整除? (第 15 届美国数学奥林匹克)

48. 设 $f(n) \in N$ 是使 $\sum_{k=1}^{f(n)} k$ 能被 n 整除的最小数. 证明: 当且仅当 $n = 2^m(m$ 为非负整数) 时,$f(n) = 2n - 1$.(1976 美国纽约数学奥林匹克)

49. 能否找到含有 1990 个自然数的集合 S, 使

(1)S 中任意两数互素;

(2)S 中任意 $k(\geqslant 2)$ 个数的和是合数.(1990 中国国家集训队模拟考试)

50. 证明存在无限多个自然数 a 有如下性质: 对任何正整数 n,$z = n^k + a$ 都不是质数.

51. 已知 n 是确定的正整数,$r = f(k)$ 是满足 $1 \leqslant r \leqslant n$ 的整数 r 与满足 $1 \leqslant k \leqslant n$ 的整数 k 对应的函数, 且当 $k_1 < k_2$ 时恒有 $f(k_1) \leqslant f(k_2)$. 证明: 存在整数 $m(1 \leqslant m \leqslant n)$, 使 $f(m) = m$ 恒成立.

52. 假设 a, b, c, d 和 m 是这样的整数:$am^3 + bm^2 + cm + d$ 能被 5 整除, 且数 d 不能被 5 整除. 证明: 总存在整数 n, 使得 $dn^3 + cn^2 + bn + a$ 也能被 5 整除.

53. 试证两相继正整数平方之间不存在四个正整数 $a < b < c < d$, 使得 $ad = bc$.

54. 将 $1, 2, \cdots, n$ 的全排列之每一种排列看成一个自然数 (这里均指在十进制中). 证明: 当 $n \geqslant 2$ 时, 用上述方法构成的自然数中至少有一个是 7 的倍数.

55. 设 $n \geqslant 4$ 是整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in (0, 2n)$ 是 n 个不同的整数. 证明: 集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 存在一个子集, 其元素之和能被 $2n$ 整除.

56. 非常数的正整数无穷数列 $\{a_n\}$ 满足递推关系 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ 或 $2a_n - 1, n = 1, 2, \cdots$. 求证: 数列 $\{a_n\}$ 中至少有一项为合数.

57. 记 $I_k = \underbrace{11\cdots1}_{k\text{个}}$. 求证: 存在无穷多个正整数 n, 使 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 除以 n 给出互不相同的余数.

58. 证明: 对任何整数 $n > 12$, 存在一个边为整数而面积在 n 与 $2n$ 之间的直角三角形.

59. 若 A 与 B 是三位正整数,$A * B$ 表示 A 和 B 连写而成的六位正整数, 试求出所有的 A 和 B, 使得 $A, B, B - A, A * B$ 和 $\dfrac{A * B}{B}$ 都是完全平方数.

60. 是否存在整数 k, 使映射

$$(x, y) \to x^2 + kxy + y^2, x, y \in \mathbb{Z}$$

的象集是自然数集 $\mathbb{N}$?

61. 证明存在无穷多个正整数 n 满足: 对 $n^2 + 3$ 的每一个质因子 p, 都可以找到一个正整数 k, 使 $k^2 < n$, 并且 $p \mid k^2 + 3$.

62. 除了 $(x, y, z) = (n, n, n)$ 之外, 不定方程 $(x + y + z)^3 = 9(x^2y + y^2z + z^2x)$ 还存在其它整数解吗?
wwgh

参考文献

[1] 常庚哲, 谢盛刚. 数学竞赛中的函数 $[x]$. 安徽: 中国科学技术大学出版社,1989

[2] 熊斌. 希望数学. 北京: 气象出版社,2002

[3] 罗增儒. 高中数学奥林匹克. 陕西: 陕西师范大学出版社,2001

[4] 刘诗雄. 高中数学奥赛辅导. 陕西: 陕西师范大学出版社,2003

[5] 单墫. 初等数论. 浙江: 南京大学出版社,2000