[不等式] 已知x、y、z > 0，求证：$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\cdots$ [打开原网页(tid=9087)]

走走看看 发表于 2022-5-26 16:15 1#

x、y、z为正实数，求证：$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}$

除了用切比雪夫不等式外，有没有高中生能用的方法来证明？

经典不等式

色k 发表于 2022-5-26 16:20 来自手机 2#

方法太多了，请先自己思考一下。

PS、主题分类选一下。

isee 发表于 2022-5-26 19:55 3#

这个不等式都有名字：nesbitt 不等式

色k 发表于 2022-5-26 20:02 来自手机 4#

虽然楼上已经说了该不等式的名字，但还是建议楼主先自己尝试证明，再行搜索

楼主 | **走走看看** 发表于 2022-5-26 21:30 5#

本帖最后由 走走看看 于 2022-5-26 22:10 编辑

用通分的方式，再移到一边作差，但发现不容易配方。

转化为基本不等式可以证明。

查了下，有7种方法可以证明。

kuing 发表于 2022-5-27 00:42 6#

还是查得太快了，这题很适合入门练习......

既然都查了，那我就随便写几种吧......

完全去分母展开就不提了。

一、首先最容易想到的应该是

$$\sum\frac{x}{y+z}=\sum\frac{x^2}{xy+xz}\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+zx)}\geqslant\frac{3}{2},$$

太常用的手法了。

二、其次是排序不等式，不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$，则 $\frac{1}{y+z}\geqslant\frac{1}{z+x}\geqslant\frac{1}{x+y}$，由顺序和不小于乱序和有以下两式相加即得

$$\begin{aligned}\sum\frac{x}{y+z}&\geqslant\sum\frac{y}{y+z},\\\sum\frac{x}{y+z}&\geqslant\sum\frac{z}{y+z}.\end{aligned}$$

三、两边 +3 也是不难想到的：

$$\begin{aligned}&\iff\sum\left(\frac{x}{y+z}+1\right)\geqslant\frac{9}{2},\\&\iff(x+y+z)\sum\frac{1}{y+z}\geqslant\frac{9}{2},\\&\iff(y+z+z+x+x+y)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)\geqslant 9.\end{aligned}$$

四、SOS 方法通常也用这题来示范的

$$\begin{aligned}\sum\left(\frac{x}{y+z}-\frac{1}{2}\right)&=\frac{1}{2}\sum\frac{x-y+x-z}{y+z}\\&=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{x-y}{y+z}+\frac{y-x}{z+x}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum\frac{(x-y)^2}{(y+z)(z+x)}.\end{aligned}$$

五、将第一、三两种思路结合一下：
先类似于第一种方法那样可得

$$\sum\frac{x^2}{y+z}\geqslant\frac{x+y+z}{2},$$

然后两边加 x+y+z

$$\begin{aligned}&\iff\sum\left(\frac{x^2}{y+z}+x\right)\geqslant\frac{3(x+y+z)}{2},\\&\iff\sum\frac{x}{y+z}\geqslant\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

六、函数方法，先由齐次性不妨设 $x+y+z=1$，考虑 $f(x)=\frac{x}{1-x}$，求二阶导知其下凸，所以琴生立得，只是高中生不知是否允许用？

七、不允许琴生无所谓，因为琴生可行则切线法必可行，算出 $x=1/3$ 处切线是 $(9x-1)/4$，然后作差计算

$$f(x)-\frac{9x-1}{4}=\frac{(3x-1)^2}{4(1-x)}\implies f(x)\geqslant\frac{9x-1}{4}\implies\cdots$$

七点五、将切线法改写一下

$$\frac{x}{y+z}-\frac{1}{4}\left(\frac{9x}{x+y+z}-1\right)=\frac{(2x-y-z)^2}{4(y+z)(x+y+z)}\geqslant 0\implies\sum\frac{x}{y+z}\geqslant\frac{1}{4}(9-3)=\frac{3}{2}.$$

可起到装X效果，当然这装得太明显，只能忽悠新手。

八、分母换元，这应该属于很容易想到的，但我写到这里才想起，才放到这么后......
令 $y+z=a$ 等等，则

$$\sum\frac{x}{y+z}=\sum\frac{b+c-a}{2a}=\frac{1}{2}\left(\sum\frac{a}{b}+\sum\frac{b}{a}\right)-\frac{3}{2}\geqslant\frac{3}{2}.$$

九、待定齐次指数式方法，看是否存在 t 使 $\frac{x}{y+z}\geqslant\frac{3}{2}\cdot\frac{x^t}{x^t+y^t+z^t}$，取 $y=z=1$ 后求导再令 $x=1$，可知 t 只能是 $3/2$，于是换个元，尝试证明

$$\frac{x^2}{y^2+z^2}\geqslant\frac{3}{2}\cdot\frac{x^3}{x^3+y^3+z^3},$$

即证

$$2(x^3+y^3+z^3)\geqslant 3x(y^2+z^2),$$

由均值 $x^3+y^3+y^3\geqslant 3xy^2, x^3+z^3+z^3\geqslant 3xz^2$ 相加即得。

十、最后再写一个变形技巧高一点的，凑够十吧......
不妨设 z 最小，则

$$\begin{aligned}&\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}-\frac{3}{2}\\={}&\frac{x-y}{y+z}+\frac{y-x}{z+x}+\frac{y}{y+z}-\frac{1}{2}+\frac{x}{z+x}-\frac{1}{2}+\frac{z}{x+y}-\frac{1}{2}\\={}&\frac{(x-y)^2}{(x+z)(y+z)}+\frac{y-z}{2(y+z)}+\frac{x-z}{2(x+z)}+\frac{z-x+z-y}{2(x+y)}\\={}&\frac{(x-y)^2}{(x+z)(y+z)}+\frac{y-z}{2}\left(\frac{1}{y+z}-\frac{1}{x+y}\right)+\frac{x-z}{2}\left(\frac{1}{x+z}-\frac{1}{x+y}\right)\\={}&\frac{(x-y)^2}{(x+z)(y+z)}+\frac{(y-z)(x-z)}{2(y+z)(x+y)}+\frac{(y-z)(x-z)}{2(x+z)(x+y)}\geqslant 0.\end{aligned}$$

评分

参与人数 1	威望 +1	理由
走走看看	+ 1	方法多样，都有点启发性！

收起

查看全部评分

[不等式] $\frac{a^a}{a+b}+\frac{b^b}{b+c}+\frac{c^c}{c+a}\geqslant\frac{3}{2}$ [打开原网页(tid=11322)]

Tesla35 发表于 2023-8-6 08:57 | 只看大图 1 1#

求证：对于任意正实数a,b,c均有

$$\frac{a^a}{a+b}+\frac{b^b}{b+c}+\frac{c^c}{c+a}\geqslant\frac{3}{2}$$

成立.

轮换对称, 幂指

2# 已折叠

kuing 发表于 2023-8-6 14:05 3 3#

简单题，易证

$$x^x\geqslant\frac{x^2+1}{2}\geqslant\frac{(x+1)^2}{4},$$

所以

$$\text{LHS}\geqslant\frac{1}{4}\sum\frac{(a+1)^2}{a+b}\geqslant\frac{(a+b+c+3)^2}{8(a+b+c)},$$

记 $t=a+b+c$，有

$$\frac{(t+3)^2}{8t}-\frac{3}{2}=\frac{(t-3)^2}{8t}\geqslant0,$$

即得证。

评分

参与人数 1	威望 +1	理由	收起
力工	+ 1	精彩！	

查看全部评分

kuing 发表于 2023-8-6 18:09 4#

话说，当年我在《数间》写《切线法》时就出过类似题，也是用 $x^x\geqslant\frac{x^2+1}{2}$ 这个来切的，具体见：《数学空间》2011 年第 4 期 P.28

5# 已折叠 6# 已折叠 7# 已折叠

其妙 发表于 2023-8-8 23:44 8#

前面复制楼主的代码粗心大意，没改好，现在重新发：
已知所有字母均为正数，x,y,z为给定的正常数，求

$$\frac{xc}{a+b}+\frac{ya}{b+c}+\frac{zb}{c+a}$$

的最小值。

kuing 发表于 2023-8-9 00:45 1 9#

> 其妙 发表于 2023-8-8 23:44
> 前面复制楼主的代码粗心大意，没改好，现在重新发：
> 已知所有字母均为正数，x,y,z为给定的正常数，求
>
> $$\frac{xc}{a+b}+\frac{ya}{b+c}+\frac{zb}{c+a}$$
>
> 的最小值。

这个就没那么容易了，暂时解决了部分情况。

由 CS 有

$$\begin{aligned}\sum\frac{xc}{a+b}&=\sum\frac{x(c+a+b-a-b)}{a+b}\\&=(a+b+c)\sum\frac{x}{a+b}-\sum x\\&=\frac{1}{2}\sum(a+b)\sum\frac{x}{a+b}-\sum x\\&\geqslant\frac{1}{2}\left(\sum\sqrt{x}\right)^2-\sum x,\quad(*)\end{aligned}$$

来看看取等条件，为

$$\frac{a+b}{\sqrt{x}}=\frac{b+c}{\sqrt{y}}=\frac{c+a}{\sqrt{z}},$$

也就是说，当 $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ 能构成三角形时，式 (*) 能取等，而构不成的话就取不了，还需另行讨论。

待续……

kuing 发表于 2023-8-9 02:36 3 10#

续楼上：

当 $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ 不能构成三角形时，不妨设 $\sqrt{x}\geqslant\sqrt{y}+\sqrt{z}$，下面证明此时有

$$\frac{xc}{a+b}+\frac{ya}{b+c}+\frac{zb}{c+a}>2\sqrt{yz},\quad(**)$$

由所设及均值，有

$$\begin{aligned}\text{LHS}&\geqslant\frac{\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2c}{a+b}+\frac{ya}{b+c}+\frac{zb}{c+a}\\&=\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\right)y+\left(\frac{c}{a+b}+\frac{b}{c+a}\right)z+\frac{2\sqrt{yz}c}{a+b}\\&\geqslant2\sqrt{\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{b}{c+a}\right)}yz+\frac{2\sqrt{yz}c}{a+b},\end{aligned}$$

那么只需证明

$$\sqrt{\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{b}{c+a}\right)}+\frac{c}{a+b}>1,$$

事实上

$$\begin{aligned}&\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{b}{c+a}\right)-\left(1-\frac{c}{a+b}\right)^2\\={}&\frac{2c^2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}>0,\end{aligned}$$

所以式 (**) 得证，而且，当 $a=\sqrt{z}$, $b=\sqrt{y}$, $c\to0$ 时 $\text{LHS}\to2\sqrt{yz}$，这说明 $2\sqrt{yz}$ 是下确界。

综合楼上及本楼所述，结论为：

（1）当 $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ 能构成三角形时，原式最小值为

$$\frac{1}{2}\left(\sum\sqrt{x}\right)^2-\sum x;$$

（2）当 $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ 不能构成三角形时，不妨设 x 最大，则原式有下确界为 $2\sqrt{yz}$，要想取到这个值，得允许 a, b, c 有一个为零。

其妙 发表于 2023-8-12 08:17 11#

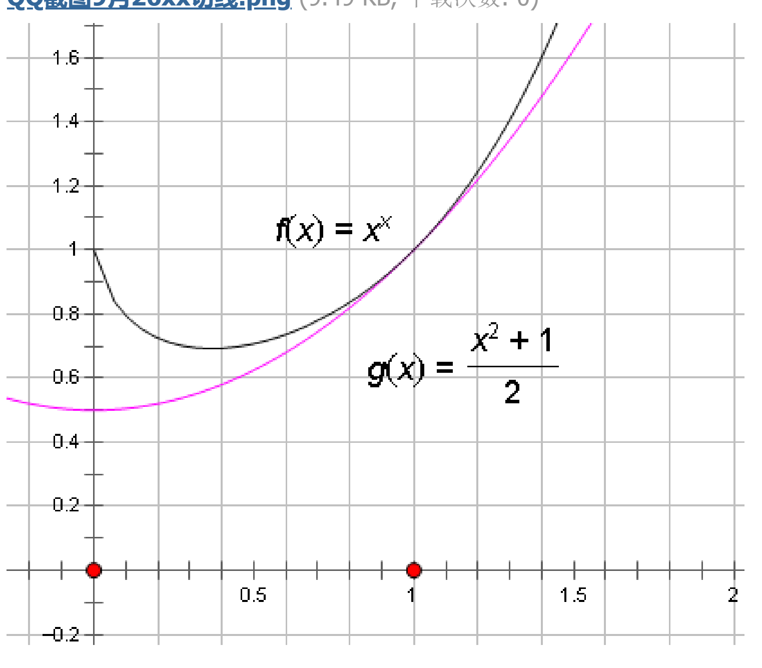
> kuing 发表于 2023-8-9 00:45
> 这个就没那么容易了，暂时解决了部分情况。
>
> 由 CS 有

💯

realnumber 发表于 2023-9-26 13:54 12#

此帖原文本已丢失

QQ截图9月26xx切线.png (9.49 KB, 下载次数: 0)



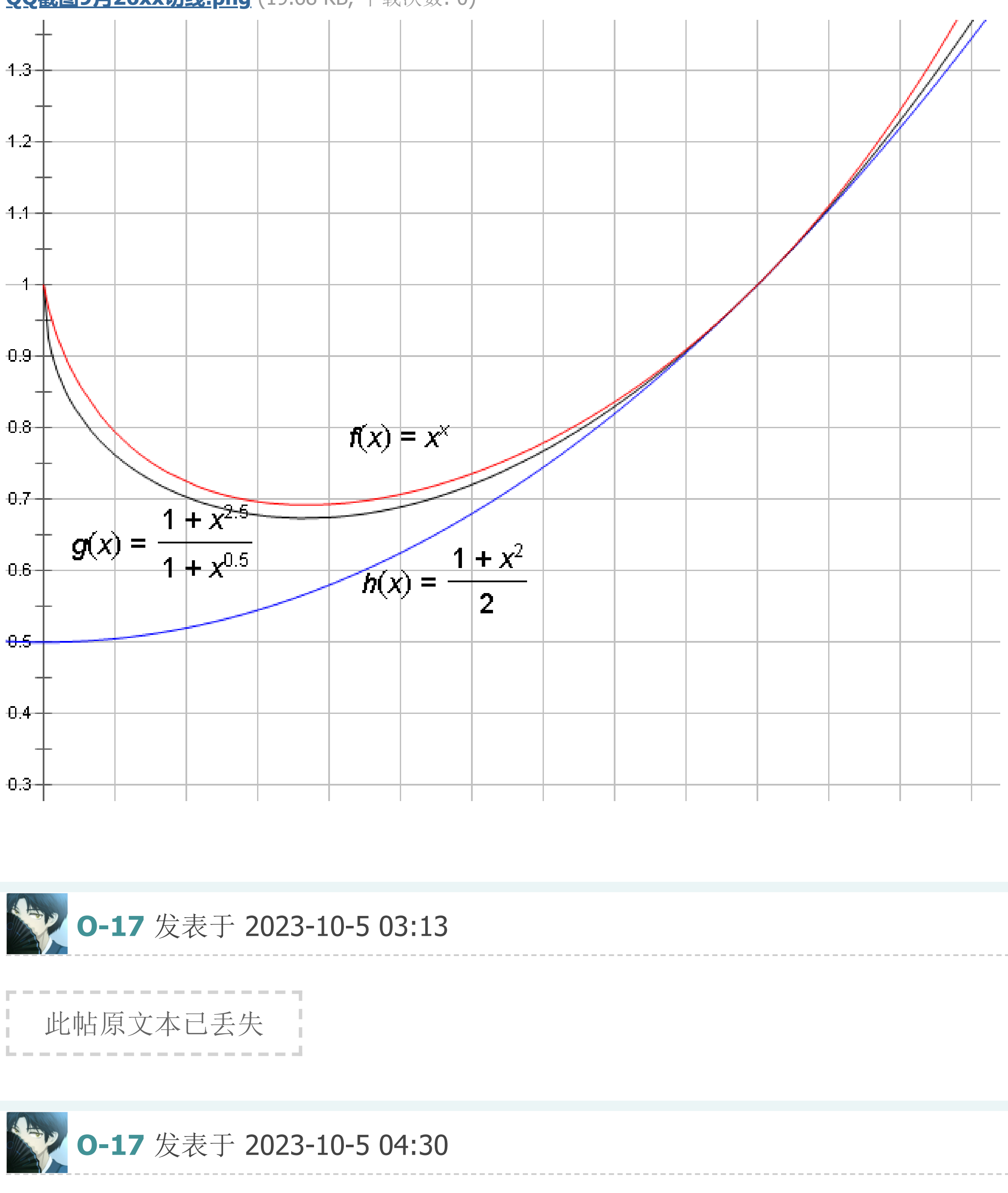
realnumber 发表于 2023-9-27 07:27 13#

本帖最后由 kuing 于 2023-11-7 17:46 编辑

猜测有更强式

$$x^x\geqslant\frac{1+x^{2.5}}{1+x^{0.5}}$$

QQ截图9月26xx切线.png (19.68 KB, 下载次数: 0)



O-17 发表于 2023-10-5 03:13 1 14#

此帖原文本已丢失

O-17 发表于 2023-10-5 04:30 1 15#

本帖最后由 O-17 于 2023-11-7 17:57 编辑

$$\begin{aligned}x^x\geqslant\frac{1+x^{\frac{5}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}}&\Leftrightarrow t^{2t^2}\geqslant\frac{1+t^5}{1+t}\\&\Leftrightarrow 2t^2\ln t\geqslant\ln\frac{1+t^5}{1+t}\\&\Leftrightarrow f(x)=2x^2\ln x-\ln\frac{1+x^5}{1+x}\geqslant0\end{aligned}$$

当 $x\geqslant1$ 时, 有

$$f(x)\geqslant2x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)-\ln\frac{1+x^5}{1+x}=:g(x)$$

而 $g(1)=0$ 且

$$g'(x)=\frac{(x+1)(x-1)^2\left(4x^3+2x^2+2x-1\right)}{1+x^5}\geqslant0$$

所以

$$f(x)\geqslant g(x)\geqslant0.$$

当 $0<x<1$ 时, 依 $\ln(1+x)$ 的 $(2,1)$ 阶 Pade 逼近

$$\ln(1+x)\leqslant\frac{x^2+6x}{4x+6}=:\psi(x)$$

可得

$$\begin{aligned}2x^2\ln x&\geqslant-2x^2\psi\left(\frac{1}{x}-1\right)\\&\geqslant\psi(-x+x^2-x^3+x^4)\\&\geqslant\ln(1-x+x^2-x^3+x^4)\\&=\ln\frac{1+x^5}{1+x}\end{aligned}$$

待证明的就只有 $\geqslant$ 了, 注意到

$$\begin{aligned}-2x^2\psi\left(\frac{1}{x}-1\right)-\psi(-x+x^2-x^3+x^4)&=\frac{-x^9+21x^7-38x^6+31x^5-42x^4+51x^3-28x^2+6x}{4x^5+4x^4-4x^3+4x^2-2x+12}\\&=\frac{x(1-x)^2}{4(x+2)}\frac{2x^4(x+3)(1-x)+8(2x-1)^2+(3x^2-2)^2+21x^4}{x^4+2+(x^2+1)(1-x)^2}\\&\geqslant0.\ \square\end{aligned}$$

[不等式] 三个不等式小问题 [打开原网页(tid=9104)]

facebooker 发表于 2022-5-28 20:36 | 只看大图 1#

(1) 已知正实数x,y满足$xy\geqslant 1$，则$\frac{2}{x+2}+\frac{1}{y+1}$的最大值为___

(2)已知实数x,y满足$x+y=2$ 求$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{y^2+4}}$的取值范围.

(3) 已知正实数a,b,c满足$a+b+c=1$,求证:
$(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2>2$

二元最值, 三元不等式

kuing 发表于 2022-5-28 22:44 2#

1、直接通分最简单。

kuing 发表于 2022-5-29 03:12 3#

2、齐次化整理有

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{2(x^2+y^2)}{\sqrt{(x+y)^2+4x^2}\sqrt{(x+y)^2+y^2}}\\
&=\frac{2}{\sqrt{3+2\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{2xy}{x^2+y^2}}\sqrt{\frac32-\frac12\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{2xy}{x^2+y^2}}},
\end{aligned}$$

注意到

$$\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)^2=1,$$

所以可作三角换元，即

$$\text{原式}=\frac{2\sqrt2}{\sqrt{3+2\sin\theta+\cos\theta}\sqrt{3-\sin\theta+2\cos\theta}},$$

令 $f(\theta)=(3+2\sin\theta+\cos\theta)(3-\sin\theta+2\cos\theta)$，求导分解得

$$\begin{aligned}
f'(\theta)&=(\cos\theta-3\sin\theta)(\sin\theta+3\cos\theta+3)\\
&=2\cos\frac{\theta}{2}(\cos\theta-3\sin\theta)\left(\sin\frac{\theta}{2}+3\cos\frac{\theta}{2}\right),
\end{aligned}$$

可见取极值时 $\theta=\pi$ 或 $\tan\theta=1/3$ 或 $\tan(\theta/2)=-3$，分别计算这些极值比较大小最终可知：

当 $\theta=\pi$ 或者 $\tan(\theta/2)=-3$ 时（此时由万能公式知恰好 $\sin\theta=-3/5$ 且 $\cos\theta=-4/5$）$f(\theta)$ 取最小值 2，代回原式可得最大值为 2；

当 $\theta=\arctan(1/3)$ 时 $f(\theta)$ 取最大值 $23/2+3\sqrt{10}$，代回原式可得最小值为

$$\frac{4}{\sqrt{23+6\sqrt{10}}}=\frac{4}{3\sqrt2+\sqrt5}=\frac{12\sqrt2-4\sqrt5}{13}.$$

kuing 发表于 2022-5-29 03:35 4#

3、因为

$$(1-a^2)^2=(1-a)^2(1+a)^2>(1-a)^2(1+2a)=f(a),$$

只需证更强式

$$f(a)+f(b)+f(c)>2,\quad(*)$$

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，易知 $f(x)$ 是关于点 $(1/2,1/2)$ 中心对称的三次函数，所以 $f(a)+f(1-a)=1$，又 $f(0)=1$，即

$$2=f(a)+f(1-a)+f(0)=f(a)+f(b+c)+f(0),$$

因此式 (*) 等价于

$$f(b)+f(c)>f(b+c)+f(0),\quad(**)$$

到这里其实已经可以直接代入函数作分解计算了，但我想把目光放远些，这样玩：

$$\begin{aligned}
(**)&\iff f(b)-f(0)>f(b+c)-f(c)\\
&\iff\int_0^b f'(x)\,\mathrm{d}x>\int_c^{b+c}f'(x)\,\mathrm{d}x\\
&\iff\int_0^b f'(x)\,\mathrm{d}x>\int_0^b f'(x+c)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

由条件及前面的不妨设可知 $2b+c\leqslant 1$，由此易证对 $x\in[0,b]$ 恒有 $|x-1/2|\geqslant|x+c-1/2|$，而 $f'(x)$ 关于 $x=1/2$ 对称且先减后增，于是恒有 $f'(x)\geqslant f'(x+c)$，所以上式成立，即得证。

之所以说“目光放远些”，是因为我已经感觉到从上述方法可以提取出一个关于中心对称函数的调整不等式命题，时间关系，明天有空再撸……

kuing 发表于 2022-6-1 16:05 5#

> kuing 发表于 2022-5-29 03:35
> 3、…
> …
> 之所以说“目光放远些”，是因为我已经感觉到从上述方法可以提取出一个关于中心对称函数的调整不等式命题，时间关系，明天有空再撸……

由于完全无回响，放弃提取命题。

楼主 | **facebooker** 发表于 2022-6-1 23:16 6#

> kuing 发表于 2022-6-1 16:05
> 由于完全无回响，放弃提取命题。

别放弃啊 不是不回应 是登录论坛有点费劲 不知道其他地方是不是这样

希望看到经常的解答！

kuing 发表于 2022-6-1 23:18 7#

> kuing 发表于 2022-5-29 03:35
> 3、因为
> $$(1-a^2)^2=(1-a)^2(1+a)^2>(1-a)^2(1+2a)=f(a),$$
> 只需证更强式

在加强为证 $\sum(1-a)^2(1+2a)>2$ 时当然也可以直接齐次化展开，就是

$$\sum(b+c)^2(3a+b+c)>2(a+b+c)^3\iff 6abc>0.$$

楼主 | **facebooker** 发表于 2022-6-3 02:06 8#

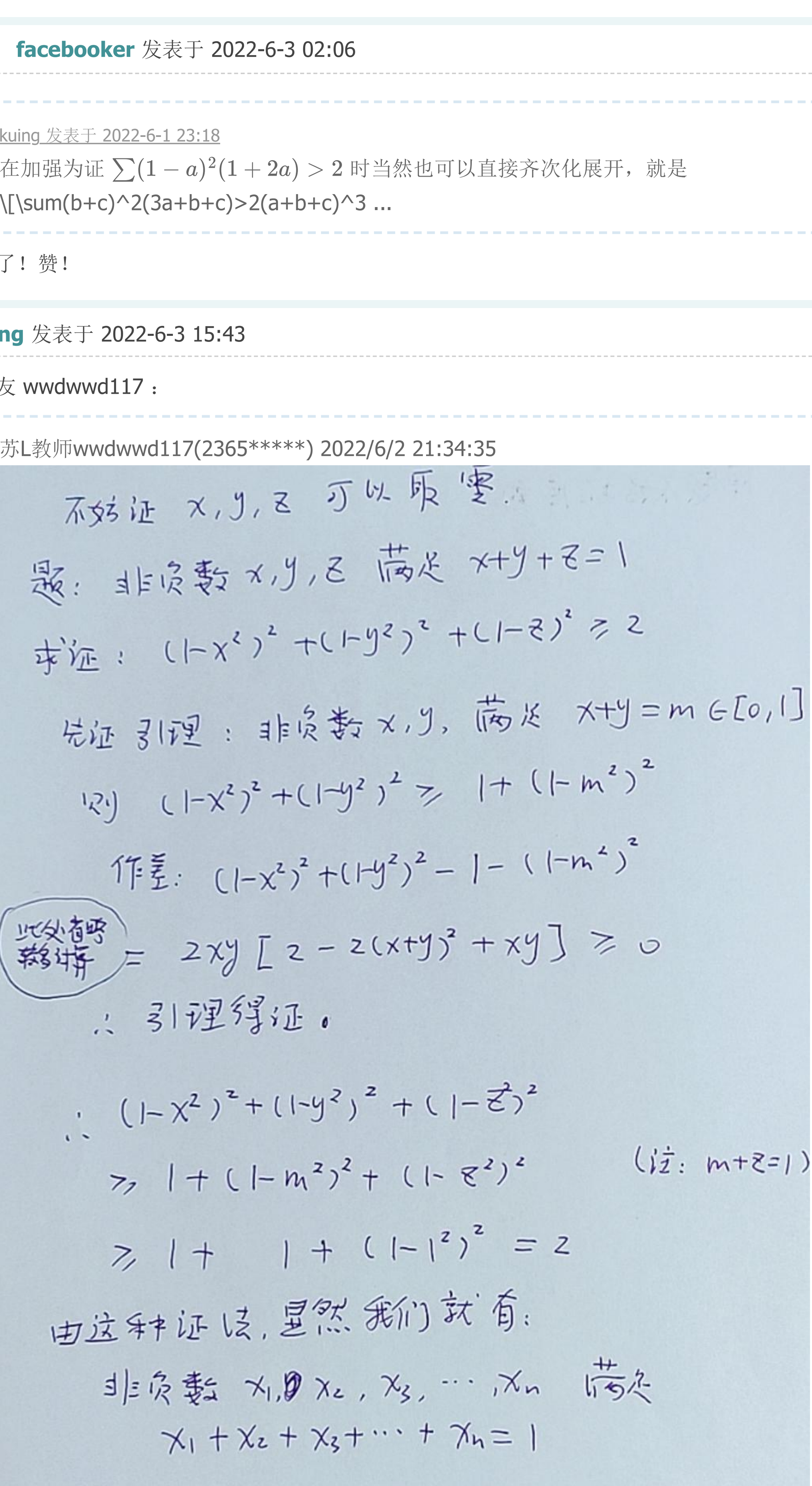
> kuing 发表于 2022-6-1 23:18
> 在加强为证 $\sum(1-a)^2(1+2a)>2$ 时当然也可以直接齐次化展开，就是
> \[\sum(b+c)^2(3a+b+c)>2(a+b+c)^3 ...

这个厉害了！赞！

kuing 发表于 2022-6-3 15:43 9#

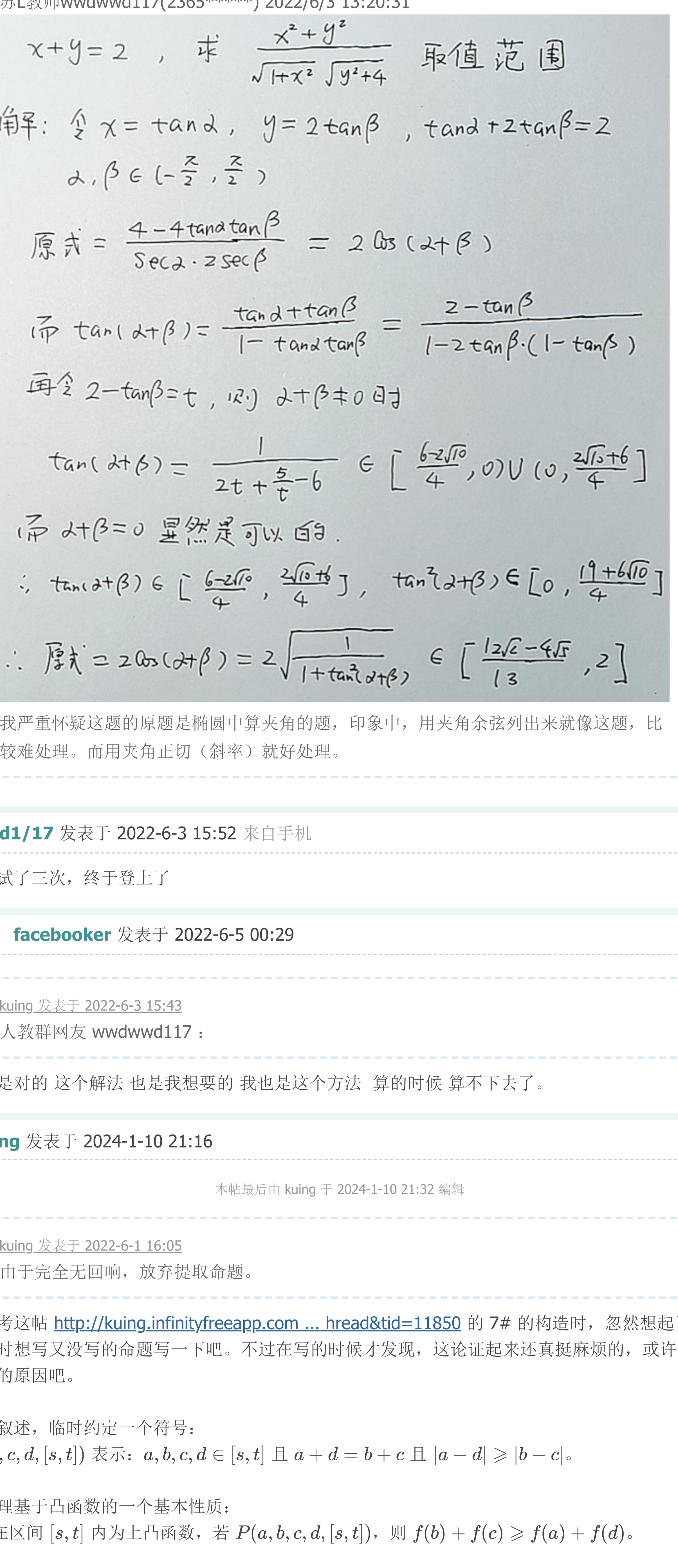
人教群网友 wwdwwd117：

> 苏L教师wwdwwd117(2365*****) 2022/6/2 21:34:35


不妨证 x,y,z 可以取零.
题：非负数 x,y,z 满足 $x+y+z=1$
求证：$(1-x^2)^2+(1-y^2)^2+(1-z^2)^2\geqslant 2$
先证引理：非负数 x,y，满足 $x+y=m\in[0,1]$
则 $(1-x^2)^2+(1-y^2)^2\geqslant 1+(1-m^2)^2$
作差：$(1-x^2)^2+(1-y^2)^2-1-(1-m^2)^2$
此处省略整理 $=2xy[2-2(x+y)^2+xy]\geqslant 0$
∴ 引理得证。
∴ $(1-x^2)^2+(1-y^2)^2+(1-z^2)^2$
$\geqslant 1+(1-m^2)^2+(1-z^2)^2$ （注：$m+z=1$）
$\geqslant 1+\quad 1+(1-1^2)^2=2$
由这种证法，显然我们就有：
非负数 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 满足
$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=1$
则：$(1-x_1^2)^2+(1-x_2^2)^2+\cdots+(1-x_n^2)^2\geqslant n-1$

> 这样是不是好理解些

> 苏L教师wwdwwd117(2365*****) 2022/6/3 13:20:31


$x+y=2$，求 $\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{y^2+4}}$ 取值范围
解：令 $x=\tan\alpha$，$y=2\tan\beta$，$\tan\alpha+2\tan\beta=2$
$\alpha,\beta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$
原式 $=\frac{4-4\tan\alpha\tan\beta}{\sec\alpha\cdot 2\sec\beta}=2\cos(\alpha+\beta)$
而 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2-\tan\beta}{1-2\tan\beta\cdot(1-\tan\beta)}$
再令 $2-\tan\beta=t$，则 $\alpha+\beta\neq 0$ 时
$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2t+\frac{5}{t}-6}\in\left[\frac{6-2\sqrt{10}}{4},0\right)\cup\left(0,\frac{2\sqrt{10}+6}{4}\right]$
而 $\alpha+\beta=0$ 显然是可以的.
∴ $\tan(\alpha+\beta)\in\left[\frac{6-2\sqrt{10}}{4},\frac{2\sqrt{10}+6}{4}\right]$，$\tan^2(\alpha+\beta)\in\left[0,\frac{19+6\sqrt{10}}{4}\right]$
∴ 原式 $=2\cos(\alpha+\beta)=2\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}}\in\left[\frac{12\sqrt2-4\sqrt5}{13},2\right]$

> 我严重怀疑这题的原题是椭圆中算夹角的题，印象中，用夹角余弦列出来就像这题，比较难处理。而用夹角正切（斜率）就好处理。

wwdwwd1/17 发表于 2022-6-3 15:52 来自手机 10#

哈哈，瞎试了三次，终于登上了

楼主 | **facebooker** 发表于 2022-6-5 00:29 11#

> kuing 发表于 2022-6-3 15:43
> 人教群网友 wwdwwd117：

你的怀疑是对的 这个解法 也是我想要的 我也是这个方法 算的时候 算不下去了。

kuing 发表于 2024-1-10 21:16 12#

本帖最后由 kuing 于 2024-1-10 21:32 编辑

> kuing 发表于 2022-6-1 16:05
> 由于完全无回响，放弃提取命题。

今天在思考这帖 http://kuing.infinityfreeapp.com ... hread&tid=11850 的 7# 的构造时，忽然想起了这帖，还是把当时想写又没写的命题写一下吧。不过在写的时候才发现，这论证起来还真挺麻烦的，或许这才是当时不想写的原因吧。

为了便于叙述，临时约定一个符号：
用 $P(a,b,c,d,[s,t])$ 表示：$a,b,c,d\in[s,t]$ 且 $a+d=b+c$ 且 $|a-d|\geqslant|b-c|$。

下面的推理基于凸函数的一个基本性质：
设 $f(x)$ 在区间 $[s,t]$ 内为上凸函数，若 $P(a,b,c,d,[s,t])$，则 $f(b)+f(c)\geqslant f(a)+f(d)$。

命题 1：设 $f(x)$ 为奇函数，在区间 $[-m,0]$ 内为上凸函数，在区间 $[0,m]$ 内为下凸函数，则

（A）若 $P(a,b,c,d,[-m,m])$ 且 $b+c\leqslant 0$，则 $f(b)+f(c)\geqslant f(a)+f(d)$；

（B）若 $P(a,b,c,d,[-m,m])$ 且 $b+c\geqslant 0$，则 $f(b)+f(c)\leqslant f(a)+f(d)$。

证明：只需证明情况（A）即可。（由（A）旋转 180° 即得（B））

由条件可不妨设 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$，则必有 $a\leqslant b\leqslant 0$，下面分 c, d 的正负情况讨论：

（1）若 $d\leqslant 0$，即 $P(a,b,c,d,[-m,0])$，那么由凸函数性质立得 $f(b)+f(c)\geqslant f(a)+f(d)$；

（2）若 $c\leqslant 0<d$，则 $b+c=a+d>a\geqslant -m$，因此 $P(b+c,b,c,0,[-m,0])$，由凸函数性质得

$$f(b)+f(c)\geqslant f(b+c)+f(0),$$

只需证

$$f(b+c)+f(0)\geqslant f(a)+f(d),$$

由奇函数有 $f(d)=-f(-d)$, $f(0)=0$，所以上式化为

$$f(b+c)+f(-d)\geqslant f(a)+f(0),$$

由 $a+d=b+c\leqslant 0$ 得 $a\leqslant -d$，所以 $P(a,b+c,-d,0,[-m,0])$，由凸函数性质知上式成立；

（3）若 $c>0$，则

$$\begin{aligned}
f(b)+f(c)\geqslant f(a)+f(d)&\iff f(b)-f(-c)\geqslant f(a)-f(-d)\\
&\iff f(b)+f(-d)\geqslant f(a)+f(-c),
\end{aligned}$$

由 $b+(-d)=a+(-c)$ 及 $a\leqslant -d$ 可知 $P(a,b,-d,-c,[-m,0])$，所以由凸函数性质知上式成立。

综上所述，命题得证。

对命题 1 作平移即得：

命题 2：设 $f(x)$ 关于点 (x_0,y_0) 对称，在区间 $[x_0-m,x_0]$ 内为上凸函数，在区间 $[x_0,x_0+m]$ 内为下凸函数，则

（A）若 $P(a,b,c,d,[x_0-m,x_0+m])$ 且 $b+c\leqslant 2x_0$，则 $f(b)+f(c)\geqslant f(a)+f(d)$；

（B）若 $P(a,b,c,d,[x_0-m,x_0+m])$ 且 $b+c\geqslant 2x_0$，则 $f(b)+f(c)\leqslant f(a)+f(d)$。

以上结论比当年在《撸题集》P.349 写的定理 3.4.1 要更广泛一些。

以上是先上凸后下凸的命题，如果是先下凸后上凸，则结论部分反过来即可，不再叙述。