如爱尔特希和盖伊于1973对于$n\leqslant 10$的情形进行了证明). 另外一个重要结果是下面的定理.

扎兰凯维奇(Zarankiewicz)定理(1954)

$$Cr(K_{m,n})\leqslant\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\times\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor\times\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\times\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor.$$

与前面一个结果一样,人们相信这个定理应该是等式. 事实上,克莱特曼(Kleitman)对于$\min\{m,n\}\leqslant 6$的情形进行了论证.

总的来讲,判定一个图的交叉数在计算复杂性角度来看是十分困难的. 加里(Garey)和约翰逊(Johnson)在1982年证明了这样一个结果:“对于给定的图G和一个自然数k,是否可以判定$Cr(G)\leqslant k$,是NP-完备的问题(即与上百个著名数学问题的计算复杂度一样).”这等于从计算机算法设计的有效性方面宣判了它的“死刑”.

例8 N是平面上n个点的集合,它们之中无三点共线. 假定联结每一对点的C_n^2条直线中每两条都相交,同时这些直线中没有三条在给定点以外共点. 证明:这C_n^2条直线在$\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$个不同于$N$的点上两两相交,并且它们把平面划分成$\frac{1}{8}(n-1)(n^3-5n^2+18n-8)$个连通区域,其中包括$n(n-1)$个无界区域(选自孔泰(Louis Comtet)所著的《高等组合学》(*Advanced Combinatoris*)).

证明 一共有C_n^2条直线. 用a_n表示由n个点$A_1,A_2,\cdots,A_n$决定的符合题目要求的点数. 对于较小的自然数容易直接验证. 假定结论对于n个点的情况成立,即

$$a_n=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

现在将第 $n+1$ 个点 A_{n+1} 按照要求放入平面内. 于是由 A_1A_{n+1}，A_2A_{n+1}，…，A_nA_{n+1}决定过 A_{n+1}的 n 条直线. 对于其中的每一条直线而言，每一对点 A_i，A_j（$1\leqslant i<j\leqslant n$）决定的直线与它有一个交点，所以由 A_1A_{n+1}，A_2A_{n+1}，…，A_nA_{n+1}决定的过 A_{n+1}的 n 条直线上一共有 nC_{n-1}^2 个新交点. 因此，$a_{n+1}=a_n+nC_{n-1}^2$. 反复叠加求解得

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n+nC_{n-1}^2 \\ &= \frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)+nC_{n-1}^2 \\ &= \frac{1}{8}(n+1)n(n-1)(n-2). \end{aligned}$$

根据归纳法原理，对于一切自然数 n，

$$a_n=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

下面我们用平面图理论与欧拉公式解决第二个问题，怎样将其转化为平面图问题至为关键. 由于只有有限个点与交点，可以将它近似地视为一个平面图（之所以说是近似，是因为每一条直线上处于无限远的部分不是图中的部分）. 我们可以在每一条直线上选相隔充分远的两个点，然后用平面内的曲线段按照（这些新设置的“点”）在平面上出现的次序逐步联结它们，最后得到一个平面图 G（如图 9-14 所示是三个点的情形）.

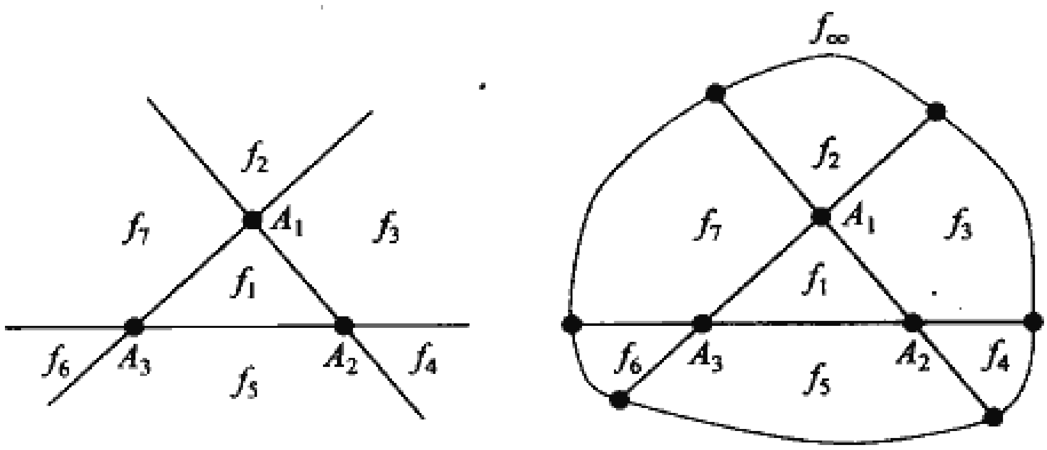

图 9-14

为了使用欧拉公式，我们来计算右边图中的点数与边数. 直线上的点分三类：N 中的点，由直线间交叉所产生的非 N 中的点；以及无限面

f_∞边界上的点. 一共有

$$|V(G)|=n+2C_n^2+\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

个节点. 所有节点的次分为三类：N 中的点的次均为 $2(n-1)$，无限面 f_∞ 边界上的点的次均为 3，直线间交叉所产生的非 N 中的点的次均为 4. 根据第一讲中的握手定理，图 G 的边数满足条件：

$$\begin{aligned}2|E(G)|&=4\times\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)+2n(n-1)\\&\quad+3n(n-1)\\&=\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)+5n(n-1),\end{aligned}$$

故

$$|E(G)|=\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)+\frac{5}{2}n(n-1).$$

根据欧拉公式，右图的面数为

$$|F|=|E(G)|-|V(G)|+2,$$

而左图中区域数目 $|F'|=|F|-1$，即

$$\begin{aligned}|F'|&=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)+\frac{3}{2}n(n-1)-(n-1)\\&=\frac{1}{8}(n-1)(n^3-5n^2+18n-8).\end{aligned}$$

至于该图有 $n(n-1)$ 个无界区域则是显然的. 证毕.

下面这个问题需要有一定的想象力.

例 9 (1) 一个平面被 n 条直线至多划分成多少个区域?
(2) 空间能被 n 个平面至多划分成为多少个单连通区域?
(德国国家队集训题)

解 **方法一** 把(1)，(2)中的数分别记为 p_n 和 s_n. 一个显然的递推公式是：$p_{n+1}=p_n+n+1$，$s_{n+1}=s_n+p_n$. 从它们的这个关系可以很快得到答案.

但是我们并不在意这个解答(因为它可能回答不了更加一般的问

题). 下面将给出另外一个解答,它会引导我们思考解决更一般的问题.

方法二 在计数理论中有一个基本原理,就是将一个计算问题利用一一对应转化成为另外一个计算问题. 第一个问题是:是否可以将平面的 p_n 个部分双射到一个较为容易计算的集合? n 条直线恰好有 C_n^2 个交点,但是每一个交点恰好又是每一个区域的最深点(又是极端原理!). 没有最深点的区域一定是下方无界的. 这 n 条直线把我们引进的水平直线 h 切成 $n+1$ 段,这些下方无界的区域可以与这些线段对应. 这样有 $n+1=C_n^0+C_n^1$ 个区域没有最深点. 所以,平面被划分成为

$$p_n=C_n^0+C_n^1+C_n^2$$

个连通区域.

在空间中,3 个平面作出一个交点,共有 C_n^3 个交点,每一个定点恰好为一个区域的最深点,因而有 C_n^3 个区域有最深点. 而没有最深点的每一个区域把一个水平平面 h 切割成 p_n 部分. 所以,空间的区域数目为

$$s_n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3.$$

点评 利用引入一个参考物(水平直线和水平平面)这一方法,将一个极为困难的凸多面体图的计算问题成功转化成为另外一个计算问题,技巧实在高! 重要之处还在于,这个方法将结果表达成为一个具有普遍性的形式:$s_n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3$,它引导我们去想象一个更加抽象而困难的问题:

在一个高维空间 R^{n+1} 中,m 个超平面可以将 R^{n+1} 最多划分成为多少个单连通凸区域? 答案是不是

$$C_m^0+C_m^1+C_m^2+\cdots+C_m^n?$$

如果没有引入水平"超平面"的概念和所谓"最深点"的观察,人们对于这一类问题的求解难度是不可想象的. 下面是这个问题的延续.