互相垂直焦点弦的中点连线神马的

kuing

March 8, 2016

先引入两个常用的结论，证明从略。

引理 1. 过抛物线焦点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点，过这两点分别作抛物线的切线，两切线交于点 E，则有：$EA \perp EB$；$EF \perp AB$；点 E 必在抛物线的准线上。

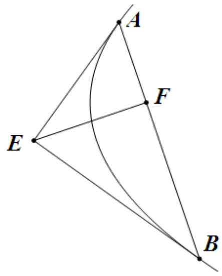

图 1

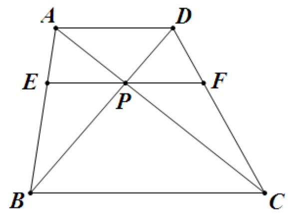

图 2

引理 2. 梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，AC 与 BD 交于点 P，过 P 作与梯形两底边平行的直线交梯形两腰于 E, F，则 P 为 EF 的中点，且 $2/EF = 1/AD + 1/BC$。

题目 1. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点为 F，弦 AB 和 CD 均过 F，且 $AB \perp CD$，点 M, N 分别为 AB, CD 的中点。

（1）求证：MN 恒过定点；

（2）求 $S_{\triangle FMN}$ 的最小值；

（3）求 $1/AB + 1/CD$。

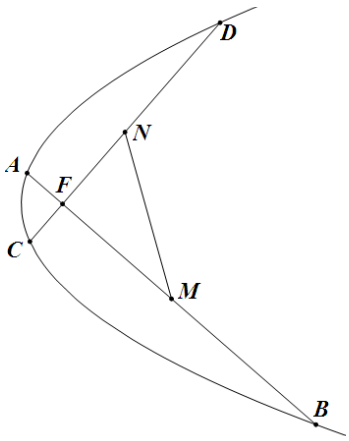

图 3

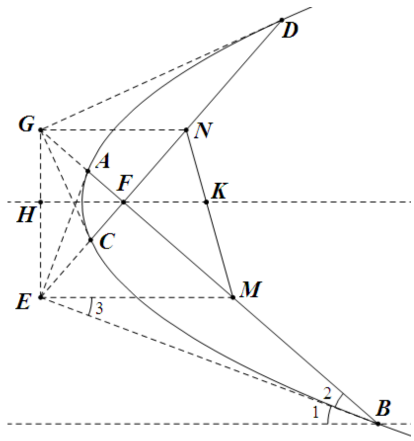

图 4

解 作 A, B 处的切线交于 E，由引理 1 知 E 在准线上，$EA \perp EB$ 且 $EF \perp AB$，而 $CD \perp AB$ 且过 F，由此可见 E, C, D 共线。

过 B 作准线的垂线，设垂线与 BE 所成角为 $\angle 1$，如图所示，由光学性质知 $\angle 1 = \angle 2$，而 EM 为 $\mathrm{Rt}\triangle AEB$ 斜边上的中线，则 $\angle 2 = \angle 3$，由此得到 ME 也垂直于准线。

同理，作 C, D 处的切线交于 G，则也有 G, A, B 共线，NG 垂直于准线且 G 为垂足。

设 EG, MN 分别与对称轴交于 H, K，由引理 2 知 $FH = FK$，所以 K 为定点，MN 恒过 K。

由 $FH = FK$ 可得

$$S_{\triangle FMN} = S_{\triangle FEG} = \frac{1}{2} FH \cdot EG = FH \cdot \frac{HE + HG}{2} \geqslant FH \cdot \sqrt{HE \cdot HG} = FH^2 = p^2,$$

当且仅当 $HE = HG$ 时取等，所以 $S_{\triangle FMN}$ 的最小值就是 p^2。

由 $AB = 2ME, CD = 2NG$ 及引理 2 得

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ME} + \frac{1}{NG}\right) = \frac{1}{HK} = \frac{1}{2p}. \qquad \square$$

可惜想用这种法子将题目推广到一般圆锥曲线似乎不太好用，因为不是抛物线的时候引理 1 的 $EA \perp EB$ 不成立，后面就有很多东东都不同。但题目确实是能推广的，只好换个方法，为了尽可能不玩代数，决定用极坐标玩，还能有点几何气息。下面将题目推广到椭圆，至于双曲线就留给你们玩吧。

题目 2. 已知椭圆的离心率为 e，焦准距为 p，焦点为 F，弦 AB 和 CD 均过 F，且 $AB \perp CD$，点 M, N 分别为 AB, CD 的中点。

（1）求证：MN 恒过定点；

（2）当两弦都不与椭圆长轴重合时，求 $S_{\triangle FMN}$ 的最大值；

（3）求 $1/AB + 1/CD$。

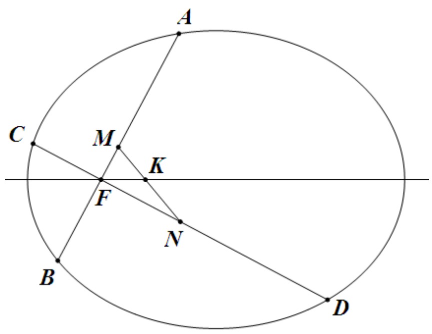

图 5

解 适当地建极坐标系，可使椭圆的方程为

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta},$$

不失一般性，设

$$\begin{aligned}
FA &= \frac{ep}{1 - e\cos\theta}, \\
FB &= \frac{ep}{1 - e\cos(\theta + 180^\circ)} = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}, \\
FC &= \frac{ep}{1 - e\cos(\theta + 90^\circ)} = \frac{ep}{1 + e\sin\theta}, \\
FD &= \frac{ep}{1 - e\cos(\theta - 90^\circ)} = \frac{ep}{1 - e\sin\theta},
\end{aligned}$$

其中 $\theta \in [0, 90^\circ)$，那么

$$FM = \frac{FA - FB}{2} = \frac{e^2 p \cos\theta}{1 - e^2 \cos^2\theta},$$
$$FN = \frac{FD - FC}{2} = \frac{e^2 p \sin\theta}{1 - e^2 \sin^2\theta},$$

设 MN 与极轴交于 K，则由张角定理有

$$\frac{1}{FK} = \frac{\sin\theta}{FN} + \frac{\sin(90^\circ - \theta)}{FM} = \frac{1 - e^2 \sin^2\theta}{e^2 p} + \frac{1 - e^2 \cos^2\theta}{e^2 p} = \frac{2 - e^2}{e^2 p},$$

即

$$FK = \frac{e^2 p}{2 - e^2},$$

所以 K 为定点，MN 恒过 K。

当两弦都不与椭圆长轴重合时，$\theta \in (0, 90^\circ)$，则

$$S_{\triangle FMN} = \frac{1}{2} FM \cdot FN = \frac{e^4 p^2 \sin\theta \cos\theta}{2(1 - e^2 \sin^2\theta)(1 - e^2 \cos^2\theta)} = \frac{e^4 p^2 \sin 2\theta}{4(1 - e^2) + e^4 \sin^2 2\theta} = \frac{e^4 p^2}{\frac{4(1-e^2)}{\sin 2\theta} + e^4 \sin 2\theta},$$

因为 $\sin 2\theta \in (0, 1]$，由双勾函数的单调性知：

（i）当 $4(1 - e^2) \leqslant e^4$，即 $e^2 \geqslant 2\sqrt{2} - 2$ 时，则当 $\sin^2 2\theta = 4(1 - e^2)/e^4$ 时 $S_{\triangle FMN}$ 取最大值，即得

$$\max S_{\triangle FMN} = \frac{e^2 p^2}{4\sqrt{1 - e^2}};$$

（ii）当 $4(1 - e^2) > e^4$，即 $e^2 < 2\sqrt{2} - 2$ 时，则当 $\sin 2\theta = 1$，即 $\theta = 45^\circ$ 时 $S_{\triangle FMN}$ 取最大值，即得

$$\max S_{\triangle FMN} = \frac{e^4 p^2}{4(1 - e^2) + e^4} = \left(\frac{e^2 p}{2 - e^2}\right)^2 = FK^2.$$

由

$$AB = FA + FB = \frac{2ep}{1 - e^2 \cos^2\theta},$$
$$CD = FC + FD = \frac{2ep}{1 - e^2 \sin^2\theta},$$

即得

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2 - e^2}{2ep} = \frac{e}{2FK}.$$

□