题目 0.0.1. 已知函数 $f(x)=a-1/x-\ln x$，若 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2，求证 $x_1+x_2<3e^{a-1}-1$。

帖地址 http://kuing.orzweb.net/viewthread.php?tid=4499

贴题者 hongxian

证明 易知 $a>1$，由此得 $e^a-e+2<3e^{a-1}-1$，下面将原题加强为

$$x_1+x_2<e^a-e+2.$$

令 $e^a=b$，则

$$f(x_1)=f(x_2)=0 \iff e^{1/x_1}x_1=e^{1/x_2}x_2=b,$$

令

$$g(x)=e^{1/x}x,\quad x>0,$$

$$h(x)=\frac{2+e(x-1)+(x-1)^2}{x-\frac{e-2}{e}},\quad x>\frac{e-2}{e},$$

易证 $g(x)$ 和 $h(x)$ 都是先减后增，都在 $x=1$ 处取最小值，稍后我们还将证明有以下关系

$$\begin{cases} g(x)<h(x), & \dfrac{e-2}{e}<x<1, \\ g(x)>h(x), & x>1, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

现在先直接用它来证明那加强式。

根据以上结果，当 $g(x)=b$ 的两零点 $x_1<x_2$，则 $h(x)=b$ 也会有两零点 x_3, x_4 且 $x_1<x_3, x_2<x_4$，而

$$h(x)=b \iff x^2-(b-e+2)x+b-e+3-\frac{2b}{e}=0,$$

所以由韦达定理

$$x_1+x_2<x_3+x_4=b-e+2=e^a-e+2.$$

下面是 (0.0.1) 的繁琐的证明过程，有待寻找简洁证明。

因为 $g(1)=h(1)$，所以只需证明 $g(x)-h(x)$ 是增函数即可，求导化简得

$$g'(x)-h'(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(e^{1/x}-\frac{ex(4-e+ex)}{(2-e+ex)^2}\right),$$

令 $x=1/u, e/(e-2)=m$，则 $u\in(0,m)$，代入即

$$g'(x)-h'(x)=(1-u)\left(e^u-\frac{e(4u-eu+e)}{(2u-eu+e)^2}\right),$$

令

$$k(u)=e^{u-1}(2u-eu+e)^2-4u+eu-e,$$

即证明当 $u\in(0,1)$ 时 $k(u)>0$，当 $u\in(1,m)$ 时 $k(u)<0$。

易知 $k(0)=k(1)=0, k(m)=2e/(2-e)<0$，求导得

$$k'(u)=e^{u-1}(2u-eu+e)(2u-eu+4-e)-4+e,$$

则 $k'(0)=0, k'(1)=8-3e<0$，再求导得

$$k''(u)=e^{u-1}(e-2)^2(u-u_1)(u-u_2),$$

其中

$$u_1=\frac{4-e}{e-2}-\sqrt{2},u_2=\frac{4-e}{e-2}+\sqrt{2},$$

在数值上有 $0<u_1<1<u_2<m$，那么：

当 $u\in(0,u_1)$ 时 $k''(u)>0$，因 $k(0)=k'(0)=0$，故对 $u\in(0,u_1]$ 有 $k(u)>0$；

当 $u\in(u_1,1)$ 时 $k''(u)<0$，则 $k(u)>\min\{k(u_1),k(1)\}$，而 $k(u_1)>0,k(1)=0$，故 $k(u)>0$；

当 $u\in(1,u_2)$ 时 $k''(u)<0$，因 $k'(1)<0$，故 $k'(u)<0$，因 $k(1)=0$，故对 $u\in(1,u_2]$ 有 $k(u)<0$；

当 $u\in(u_2,m)$ 时 $k''(u)>0$，则 $k(u)<\max\{k(u_2),k(m)\}$，而 $k(u_2)<0,k(m)<0$，故 $k(u)<0$。

综上所述，(0.0.1) 得证。 □

解答时间 2017-3-25