题目 0.0.1. 已知函数 $f(x)=(1-1/x)\ln x$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，$0<x_1<x_2$，求证：$x_1+x_2>2$。另外，还可以证明：① $2x_1+x_2>14/5$；② $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>2$；③ $1/x_1+1/x_2>2$ 等。

帖地址 http://kuing.orzweb.net/viewthread.php?tid=4492
贴题者 其妙

证明 易证 $x_1<1<x_2$，故

$$\left(1-\frac{1}{x_2}\right)(x_2-1)>f(x_2)=f(x_1)>\left(1-\frac{1}{x_1}\right)(x_1-1),$$

化简得

$$(x_2-x_1)(x_1x_2-1)>0\implies x_1x_2>1,$$

故由均值可知对任意 $\alpha>0$ 都有 $x_1^\alpha+x_2^\alpha>2(x_1x_2)^{\alpha/2}>2$，所以原题要证的以及后面的 ② 都成立，又由均值有 $2x_1+x_2>2\sqrt{2x_1x_2}>2\sqrt{2}>14/5$，① 也成立。

易证 $\ln x\geqslant 1-1/x$ 恒成立，仅当 $x=1$ 取等，所以

$$\left(1-\frac{1}{x_2}\right)^2<f(x_2)=f(x_1)<\left(1-\frac{1}{x_1}\right)^2,$$

化简得

$$\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-2\right)>0\implies\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>2,$$

所以 ③ 也成立。 □

解答时间 2017-3-19

注 后来尝试对 ③ 作加强，仿 ②，就随手加了个根号，改为证明

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}>2,$$

这也不难，换元后用老套路即可，过程如下。

令 $t=1/\sqrt{x_1}$, $u=1/\sqrt{x_2}$，则 $t>1>u$，且

$$f(x_1)=f(x_2)\iff(t^2-1)\ln t=(u^2-1)\ln u,$$

令 $g(x)=(x^2-1)\ln x$，问题就转化为 $g(t)=g(u)$ 证明 $t+u>2$，就可以用老套路了。

设 $d\in(0,1)$，下面证明 $g(1+d)<g(1-d)$，因为

$$g(1+d)-g(1-d)=d\big((2+d)\ln(1+d)+(2-d)\ln(1-d)\big),$$

令 $h(d)=(2+d)\ln(1+d)+(2-d)\ln(1-d)$，求导得

$$h'(d)=\frac{2+d}{1+d}+\ln(1+d)-\frac{2-d}{1-d}-\ln(1-d)=\frac{1}{1+d}-\frac{1}{1-d}+\ln\frac{1+d}{1-d},$$

熟知对任意 $x>1$ 恒有 $\ln x<(x-1/x)/2$，所以

$$h'(d)<\frac{1}{1+d}-\frac{1}{1-d}+\frac{1}{2}\left(\frac{1+d}{1-d}-\frac{1-d}{1+d}\right)=0,$$

故 $h(d)<h(0)=0$，所以 $g(1+d)<g(1-d)$。

由此，令 $d=1-u$，即得 $g(2-u)<g(u)=g(t)$，易证 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 递增，$2-u,t\in(1,+\infty)$，故 $2-u<t$，即 $t+u>2$，得证。

而意外的是，在进一步研究后发现，这随手加的根号竟然恰好是最佳指数，也就是有以下命题。

命题 0.0.1. 设 $f(x)=(1-1/x)\ln x$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，$0<x_1<x_2$，则使不等式 $x_1^\alpha+x_2^\alpha>2$ 恒成立的 α 的取值范围是 $(-\infty,-1/2]\cup(0,+\infty)$。

证明 前面已经证明了 $\alpha>0$ 以及 $\alpha=-1/2$ 都是成立的，而根据幂平均的单调性，当 $\alpha\leqslant -1/2$ 时，有

$$\left(\frac{x_1^\alpha+x_2^\alpha}{2}\right)^{1/\alpha}\leqslant\left(\frac{x_1^{-1/2}+x_2^{-1/2}}{2}\right)^{-2}<1\Longrightarrow x_1^\alpha+x_2^\alpha>2,$$

所以当 $\alpha\in(-\infty,-1/2]\cup(0,+\infty)$ 时不等式都是恒成立的，那么剩下就只需对 $\alpha\in(-1/2,0]$ 进行否定即可。

$\alpha=0$ 显然不行，下面假设 $\alpha\in(-1/2,0)$，令 $t=x_1^\alpha$, $u=x_2^\alpha$，则 $t>1>u$，为方便书写，再令 $r=-1/\alpha$，则 $r>2$，类似地，令 $g(x)=(x^r-1)\ln x$，则 $f(x_1)=f(x_2)\Longleftrightarrow g(t)=g(u)$。

求导得 $g'(x)=(x^r-1)/x+rx^{r-1}\ln x$，故 $0<x<1$ 时 $g'(x)<0$，$x>1$ 时 $g'(x)>0$，求三阶导数得

$$g'''(x)=\frac{-2+(3r^2-6r+2)x^r+r(r-1)(r-2)x^r\ln x}{x^3},$$

得到 $g'''(1)=3r(r-2)>0$，由于 $g'''(x)$ 是连续函数，则存在区间 $D=(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ 使得当 $x\in D$ 时恒有 $g'''(x)>0$，根据 http://kuing.orzweb.net/viewthread.php?tid=4042（3 楼）的结论，假如 $t,u\in D$，则有 $t+u<2$，不等式就不成立，而 t, u 显然可以同时趋向 1，所以一定存在 $t,u\in D$ 的时候，这就说明 $\alpha\in(-1/2,0)$ 时不等式不恒成立，命题获证。 □