

三个相似的椭圆

何万程

2023 年 4 月 5 日

下面讨论这个问题：如图 1，若给定 $\triangle ABC$ ， $BC = a$ ， $CA = b$ ， $AB = c$ ， p 是半周长， S 是面积，外心、内心分别是点 O 、 I ，外接圆半径是 R ，内切圆半径是 r ，分别以点 B 、 C 为焦点、以点 C 、 A 为焦点、以点 A 、 B 为焦点的三个椭圆相交于同一点，这三个椭圆是相似的，确定这三个椭圆的离心率以及交点的位置。

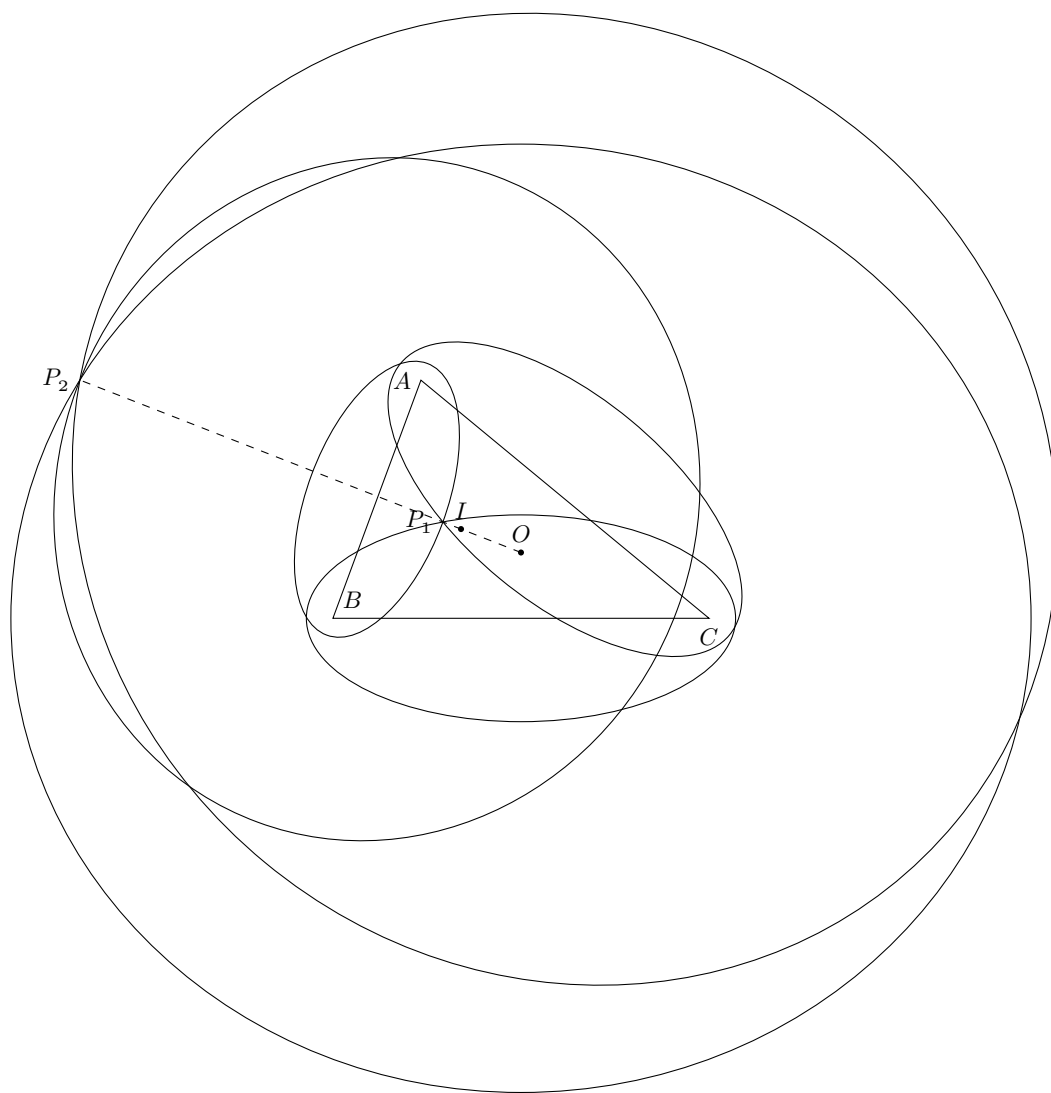


图 1

设三椭圆的离心率是 e ，交点是 P ，则

$$\frac{a}{PB+PC} = \frac{b}{PC+PA} = \frac{c}{PA+PB} = e,$$

解这个方程组得

$$PA = \frac{p-a}{e}, \quad PB = \frac{p-b}{e}, \quad PC = \frac{p-c}{e}.$$

因为

$$\begin{aligned} & (a \cdot PA)^2 \cdot (-a^2 + b^2 + c^2 - PA^2 + PB^2 + PC^2) + (b \cdot PB)^2 \cdot (a^2 - b^2 + c^2 + PA^2 - PB^2 + PC^2) \\ & + (c \cdot PC)^2 \cdot (a^2 + b^2 - c^2 + PA^2 - PB^2 - PC^2) \\ & = (abc)^2 + (a \cdot PB \cdot PC)^2 + (b \cdot PC \cdot PA)^2 + (c \cdot PA \cdot PB)^2, \end{aligned}$$

把求得的 PA 、 PB 、 PC 带 e 的表达式代入上式整理得

$$R^2 e^4 - (2R^2 - 2Rr - r^2)e^2 + R(R - 2r) = 0,$$

令 $k = \frac{r}{R}$ ，则

$$e = \sqrt{1 - k - \frac{k^2}{2} \pm \sqrt{\left(1 - k - \frac{k^2}{2}\right)^2 - 1 + 2k}},$$

再代回 PA 、 PB 、 PC 带 e 的表达式便可求得 PA 、 PB 、 PC ，一般情况下所求的点 P 有两个点，如图 1 中的点 P_1 、 P_2 。再由四点六长度确定的重心坐标可得点 P 关于 $\triangle ABC$ 的重心坐标是

$$\left(\frac{a(2(b+c)(p-b)(p-c) - abc(1 - e^2 \cos A))}{8S^2 e^2}, \frac{b(2(c+a)(p-c)(p-a) - abc(1 - e^2 \cos B))}{8S^2 e^2}, \frac{c(2(a+b)(p-a)(p-b) - abc(1 - e^2 \cos C))}{8S^2 e^2} \right).$$

若 $\overline{OP} : \overline{PI} = \lambda_1 : \lambda_2$ ， $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ，则

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \left\{ \frac{a}{2p}, \frac{b}{2p}, \frac{c}{2p} \right\} + (1 - \lambda_1) \left\{ \frac{a^2 bc \cos A}{8S^2}, \frac{ab^2 c \cos B}{8S^2}, \frac{abc^2 \cos C}{8S^2} \right\} \\ & = \left\{ \frac{a(2(b+c)(p-b)(p-c) - abc(1 - e^2 \cos A))}{8S^2 e^2}, \frac{b(2(c+a)(p-c)(p-a) - abc(1 - e^2 \cos B))}{8S^2 e^2}, \right. \\ & \quad \left. \frac{c(2(a+b)(p-a)(p-b) - abc(1 - e^2 \cos C))}{8S^2 e^2} \right\}, \end{aligned}$$

解方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 \frac{a}{2p} + (1 - \lambda_1) \frac{a^2 bc \cos A}{8S^2} = \frac{a(2(b+c)(p-b)(p-c) - abc(1 - e^2 \cos A))}{8S^2 e^2}, \\ \lambda_1 \frac{b}{2p} + (1 - \lambda_1) \frac{ab^2 c \cos B}{8S^2} = \frac{b(2(c+a)(p-c)(p-a) - abc(1 - e^2 \cos B))}{8S^2 e^2}, \\ \lambda_1 \frac{c}{2p} + (1 - \lambda_1) \frac{abc^2 \cos C}{8S^2} = \frac{c(2(a+b)(p-a)(p-b) - abc(1 - e^2 \cos C))}{8S^2 e^2}, \end{cases}$$

得

$$\lambda_1 = \frac{1}{e^2},$$

所以点 O 、 I 、 P 共线且

$$\frac{\overline{OI}}{\overline{OP}} = e^2.$$

设点 P_1 、 P_2 所对应的离心率分别是 e_1 、 e_2 ，由重心坐标确定两点的距离公式可得

$$P_1P_2 = \sqrt{\frac{(e_1^2 - e_2^2)^2}{(e_1^2 e_2^2)^2} R(R - 2r)},$$

因为

$$e_1^2 + e_2^2 = \frac{2R^2 - 2Rr - r^2}{R^2}, \quad e_1^2 e_2^2 = \frac{R - 2r}{R}, \quad (e_1^2 - e_2^2)^2 = (e_1^2 + e_2^2)^2 - 4e_1^2 e_2^2,$$

所以

$$P_1P_2 = \sqrt{\frac{(2R^2 - 2Rr - r^2)^2}{R(R - 2r)} - 4R^2}.$$