引理 1. 以点 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) 为焦点，$2a$ 为定长的椭圆的方程是

$$\begin{aligned}&4\left(4a^2-(x_1-x_2)^2\right)x^2-8(x_1-x_2)(y_1-y_2)xy+4\left(4a^2-(y_1-y_2)^2\right)y^2\\&-4\left(4a^2(x_1+x_2)-(x_1-x_2)\left(x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2\right)\right)x\\&-4\left(4a^2(y_1+y_2)-(y_1-y_2)\left(x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2\right)\right)y\\&-16a^4+8a^2\left(x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2\right)-\left(x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2\right)^2=0\text{。}\end{aligned}$$

引理 1 的证明只需要利用椭圆的定义对方程平方展开整理即可，这里就不写具体的推导了。

引理 2. 两个仅有一个公共焦点的椭圆最多只有两个公共点。

证明 设两个椭圆有公共焦点 O；第一个椭圆的离心率是 e_1，O 与其对应的准线距离是 p_1，另一个焦点是 F_1；第二个椭圆的离心率是 e_2，O 与其对应的准线距离是 p_2，另一个焦点是 F_2；$\angle F_1OF_2=\alpha$。以 O 为极点，OF_1 为极轴，正方向是有向线段 $\overline{OF_1}$ 的方向，不妨设有向线段 $\overline{OF_1}$ 绕点 O 旋转 α 后与有向线段 $\overline{OF_2}$ 的正方向重合，则两个椭圆的极坐标方程分别是

$$\rho=\frac{e_1p_1}{1-e_1\cos\theta}\text{，}\ \rho=\frac{e_2p_2}{1-e_2\cos(\theta-\alpha)},$$

由

$$\frac{e_1p_1}{1-e_1\cos\theta}=\frac{e_2p_2}{1-e_2\cos(\theta-\alpha)}$$

整理得

$$\cos\left(\theta+\arccos\frac{p_1\cos\alpha-p_2}{\sqrt{p_1^2+p_2^2-2p_1p_2\cos\alpha}}\right)=\frac{e_1p_1-e_2p_2}{e_1e_2\sqrt{p_1^2+p_2^2-2p_1p_2\cos\alpha}},$$

在区间 $[0,2\pi)$ 内这个方程最多只有两个解，所以第一个椭圆和第二个椭圆最多只有两个公共点。 □

引理 3. 设第一个椭圆的焦点分别是 (x_0, y_0)、(x_1, y_1)，定长是 $2a_1$；第二个椭圆的焦点分别是 (x_0, y_0)、(x_2, y_2)，定长是 $2a_2$；若这两个椭圆有公共点，则公共弦的方程是

$$\begin{aligned}&2\left((a_1-a_2)x_0+a_2x_1-a_1x_2\right)x+2\left((a_1-a_2)y_0+a_2y_1-a_1y_2\right)y\\&+4a_1a_2(a_1-a_2)+a_2\left(x_0^2-x_1^2+y_0^2-y_1^2\right)-a_1\left(x_0^2-x_2^2+y_0^2-y_2^2\right)=0\text{。}\end{aligned}$$

证明 由引理 1 得，第一个椭圆的方程是

$$\begin{aligned}f_1(x,y)=&4\left(4a_1^2-(x_0-x_1)^2\right)x^2-8(x_0-x_1)(y_0-y_1)xy+4\left(4a_1^2-(y_0-y_1)^2\right)y^2\\&-4\left(4a_1^2(x_0+x_1)-(x_0-x_1)\left(x_0^2-x_1^2+y_0^2-y_1^2\right)\right)x\\&-4\left(4a_1^2(y_0+y_1)-(y_0-y_1)\left(x_0^2-x_1^2+y_0^2-y_1^2\right)\right)y\\&-16a_1^4+8a_1^2\left(x_0^2+x_1^2+y_0^2+y_1^2\right)-\left(x_0^2-x_1^2+y_0^2-y_1^2\right)^2=0,\end{aligned}$$

第二个椭圆的方程是

$$\begin{aligned}f_2(x,y)=&4\left(4a_2^2-(x_0-x_2)^2\right)x^2-8(x_0-x_2)(y_0-y_2)xy+4\left(4a_2^2-(y_0-y_2)^2\right)y^2\\&-4\left(4a_2^2(x_0+x_2)-(x_0-x_2)\left(x_0^2-x_2^2+y_0^2-y_2^2\right)\right)x\\&-4\left(4a_2^2(y_0+y_2)-(y_0-y_2)\left(x_0^2-x_2^2+y_0^2-y_2^2\right)\right)y\\&-16a_2^4+8a_2^2\left(x_0^2+x_2^2+y_0^2+y_2^2\right)-\left(x_0^2-x_2^2+y_0^2-y_2^2\right)^2=0\text{。}\end{aligned}$$

因为

$$a_2^2f_1(x,y)-a_1^2f_2(x,y)=l_1(x,y)\,l_2(x,y)\,,$$

其中

$$\begin{aligned}l_1(x,y)=&2\left(\left(a_1+a_2\right)x_0-a_2x_1-a_1x_2\right)x+2\left(\left(a_1+a_2\right)y_0-a_2y_1-a_1y_2\right)y\\&-4a_1a_2\left(a_1+a_2\right)-a_2\left(x_0^2-x_1^2+y_0^2-y_1^2\right)-a_1\left(x_0^2-x_2^2+y_0^2-y_2^2\right),\\l_2(x,y)=&2\left(\left(a_1-a_2\right)x_0+a_2x_1-a_1x_2\right)x+2\left(\left(a_1-a_2\right)y_0+a_2y_1-a_1y_2\right)y\\&+4a_1a_2\left(a_1-a_2\right)+a_2\left(x_0^2-x_1^2+y_0^2-y_1^2\right)-a_1\left(x_0^2-x_2^2+y_0^2-y_2^2\right),\end{aligned}$$

方程组

$$\begin{cases}f_1(x,y)=0,\\l_2(x,y)=0,\end{cases}$$

消去 y 后计算关于 x 的一元二次方程的判别式的值是

$$\begin{aligned}&64\left(a_2\left(y_0-y_1\right)-a_1\left(y_0-y_2\right)\right)^2\left(4a_1^2-\left(x_0-x_1\right)^2-\left(y_0-y_1\right)^2\right)\left(4a_2^2-\left(x_0-x_2\right)^2-\left(y_0-y_2\right)^2\right)\\&\cdot\left(\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2-4\left(a_1-a_2\right)^2\right),\end{aligned}$$

由椭圆的定义立即得

$$4a_1^2-\left(x_0-x_1\right)^2-\left(y_0-y_1\right)^2>0,\ 4a_2^2-\left(x_0-x_2\right)^2-\left(y_0-y_2\right)^2>0,$$

设两个椭圆有一公共点 P，点 F_0 坐标是 (x_0,y_0)，点 F_1 坐标是 (x_1,y_1)，点 F_2 坐标是 (x_2,y_2)，则

$$2\left|a_1-a_2\right|=\left|\left(PF_0+PF_1\right)-\left(PF_0+PF_2\right)\right|=\left|PF_1-PF_2\right|\leqslant F_1F_2,$$

所以

$$\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2-4\left(a_1-a_2\right)^2\geqslant 0,$$

即方程组方程组

$$\begin{cases}f_1(x,y)=0,\\l_2(x,y)=0,\end{cases}$$

有实数解，设解是 $P_1\left(x_1',y_1'\right)$、$P_2\left(x_1',y_1'\right)$，则必定有 $f_2\left(x_1',y_1'\right)=0$ 以及 $f_2\left(x_2',y_2'\right)=0$，所以直线 $l_2(x,y)$ 过两椭圆的两个公共点，由引理 2 知两椭圆最多只有两个公共点，所以所求两椭圆的公共弦的方程就是

$$\begin{aligned}&2\left(\left(a_1-a_2\right)x_0+a_2x_1-a_1x_2\right)x+2\left(\left(a_1-a_2\right)y_0+a_2y_1-a_1y_2\right)y\\&+4a_1a_2\left(a_1-a_2\right)+a_2\left(x_0^2-x_1^2+y_0^2-y_1^2\right)-a_1\left(x_0^2-x_2^2+y_0^2-y_2^2\right)=0。\end{aligned}$$

若这两个椭圆内切，则此时公共弦就是两个椭圆的公切线。 □

定理 1. 以不共线的三点其中两个点为焦点的三个椭圆两两有公共点，则三椭圆两两形成的三条公共弦（若两个椭圆内切，则此时公共弦就是两个椭圆的公切线。）共点。

证明 设点 A、B、C 的坐标分别是 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3)，以点 B、C 为焦点的椭圆的定长是 $2a_1$，以点 C、A 为焦点的椭圆的定长是 $2a_2$，以点 A、B 为焦点的椭圆的定长是 $2a_3$，由引理 3 得三个椭圆两两的公共弦方程分别是

$$\begin{aligned}&2\left(\left(a_3-a_1\right)x_2+a_1x_1-a_3x_3\right)x+2\left(\left(a_3-a_1\right)y_2+a_1y_1-a_3y_3\right)y\\&+4a_3a_1\left(a_3-a_1\right)+a_1\left(x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2\right)-a_3\left(x_2^2-x_3^2+y_2^2-y_3^2\right)=0,\\&2\left(\left(a_1-a_2\right)x_3+a_2x_2-a_1x_1\right)x+2\left(\left(a_1-a_2\right)y_3+a_2y_2-a_1y_1\right)y\\&+4a_1a_2\left(a_1-a_2\right)+a_2\left(x_3^2-x_2^2+y_3^2-y_2^2\right)-a_1\left(x_3^2-x_1^2+y_3^2-y_1^2\right)=0,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&2\left(\left(a_2-a_3\right)x_1+a_3x_3-a_2x_2\right)x+2\left(\left(a_2-a_3\right)y_1+a_3y_3-a_2y_2\right)y\\
&\quad+4a_2a_3\left(a_2-a_3\right)+a_3\left(x_1^2-x_3^2+y_1^2-y_3^2\right)-a_2\left(x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2\right)=0,
\end{aligned}
$$

由前两条直线方程求得交点是

$$\left(-\frac{u}{2t},\frac{v}{2t}\right),$$

其中

$$
\begin{aligned}
&t=x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_2y_1-x_3y_2,\\
&u=4\left(a_1a_2\left(y_1-y_2\right)+a_2a_3\left(y_2-y_3\right)+a_3a_1\left(y_3-y_1\right)\right)+\left(x_1^2-x_2^2\right)y_3+\left(x_2^2-x_3^2\right)y_1+\left(x_3^2-x_1^2\right)y_2\\
&\qquad+\left(y_1-y_2\right)\left(y_2-y_3\right)\left(y_3-y_1\right),\\
&v=4\left(a_1a_2\left(x_1-x_2\right)+a_2a_3\left(x_2-x_3\right)+a_3a_1\left(x_3-x_1\right)\right)+\left(y_1^2-y_2^2\right)x_3+\left(y_2^2-y_3^2\right)x_1+\left(y_3^2-y_1^2\right)x_2\\
&\qquad+\left(x_1-x_2\right)\left(x_2-x_3\right)\left(x_3-x_1\right)。
\end{aligned}
$$

由于点 A、B、C 不共线，所以 $t\neq 0$，经过验证该点也满足第三条直线的方程，即这三条直线共点。 □