数学活动课程讲座

三角形中等角线的性质及应用

华接春
（湖南省长沙市长郡中学，410002）

中图分类号：O123.1　文献标识码：A　文章编号：1005－6416(2022)10－0002－07

（本讲适合高中）

1　知识介绍

1.1　等角线及其性质

给定一个角$\angle AOB$，OT是其角平分线，过点O作两条关于OT对称的直线OX和OY，则称OY是OX关于$\angle AOB$的等角线.

性质1　如图1，自$\angle AOB$的顶点O引两条直线OC、OD，P是直线OC上一点，过P作直线OA、OB的垂线，垂足分别为M、N，则OC、OD是$\angle AOB$的两条等角线的充分必要条件是$OD\perp MN$.

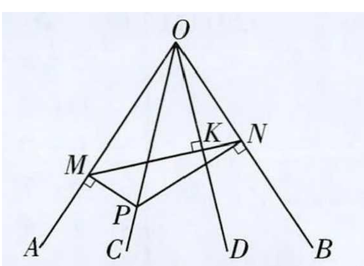

图1

证明　设直线OD与MN交于点K.

因为$PM\perp OM$，$PN\perp ON$，所以，O、M、P、N四点共圆.

因此，$\angle ONK=\angle OPM$.

又$PM\perp OM$，于是，

OC、OD是$\angle AOB$的两条等角线

$\Leftrightarrow \angle KON=\angle MOP$

$\Leftrightarrow \triangle OKN\backsim\triangle OMP$

$\Leftrightarrow \angle NKO=\angle PMO$

$\Leftrightarrow \angle NKO=90^\circ$

$\Leftrightarrow OK\perp MN\Leftrightarrow OD\perp MN$.

收稿日期：2022－07－30

性质2　如图2，设D、E是$\triangle ABC$的边BC上两点，则$\angle BAD=\angle EAC$的充分必要条件是$\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{BD\cdot BE}{CE\cdot CD}$.

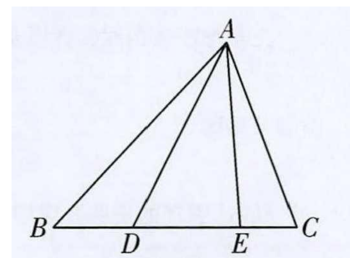

图2

证明　如图3，作$\triangle ADE$的外接圆，分别交AB、AC于点F、G，联结FG.

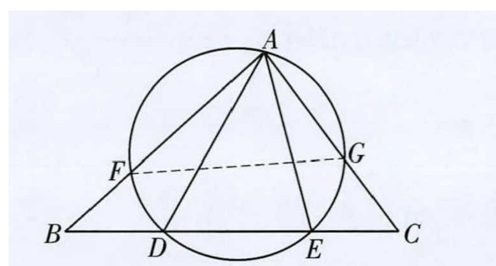

图3

由$\angle BAD=\angle CAE\Leftrightarrow \overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{EG}$

$\Leftrightarrow DE/\!/BC\Leftrightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BF}{CG}$

$\Leftrightarrow \dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{BF\cdot BA}{CG\cdot CA}=\dfrac{BD\cdot BE}{CE\cdot CD}$.

亦可以利用面积法和正弦定理证明.

性质3　$\triangle ABC$中，AC_1和AB_1是$\angle A$的等角线，BA_1和BC_1是$\angle B$的等角线，CA_1和CB_1是$\angle C$的等角线，则AA_1、BB_1、CC_1交于一点或互相平行.

证明　如图4，设AA_1、BB_1、CC_1分别与BC、AC、AB交于点D、E、F，且设$\angle BAC_1=\angle CAB_1=\alpha$，$\angle ABC_1=\angle CBA_1=\beta$，$\angle BCA_1=$

$\angle ACB_1=\gamma$.

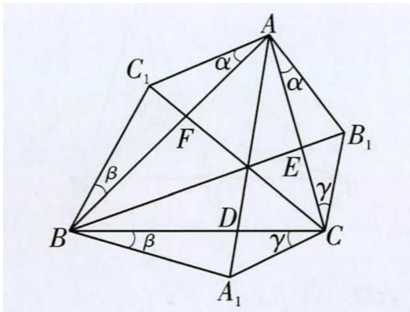

图4

则$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{S_{\triangle ABA_1}}{S_{\triangle CAA_1}}$

$=\dfrac{AB\cdot BA_1\sin(B+\beta)}{CA\cdot A_1C\sin(C+\gamma)}$

$=\dfrac{AB\sin\gamma\cdot\sin(B+\beta)}{CA\sin\beta\cdot\sin(C+\gamma)}$.

类似地,$\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{BC\sin\alpha\cdot\sin(C+\gamma)}{AB\sin\gamma\cdot\sin(A+\alpha)}$,

$\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{CA\sin\beta\cdot\sin(A+\alpha)}{AB\sin\alpha\cdot\sin(B+\beta)}$.

以上三式相乘得

$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=1$.

由塞瓦定理可知 AA_1、BB_1、CC_1 交于一点或互相平行.

1.2　等角线的几个判定方法

命题1　从三角形的同一顶点引出的三角形的高与外接圆的直径是该顶角的两条等角线.

此命题是性质1的特殊情况,另由性质1可得在$\triangle ABC$中,外心为O,垂心为H,则AO、AH互为等角线.

由命题1,可以通过构造三角形来求已知直线的等角线.若给定$\angle BAC$与任意直线AD,要求AD关于$\angle BAC$的等角线,可以构造这样一个三角形:AB、AC为任意两边,AD为$\triangle ABC$的高,作$\triangle ABC$的外接圆.那么过点A的直径AE就是AD关于$\angle BAC$的等角线.

命题2　在四边形$ABCD$中,若对角线AC平分$\angle BAD$,在CD上任取一点E,BE与AC交于点F,DF交BC于点G.则AE、AG是关于$\angle BAD$的等角线.

证明　如图5,设AC与BD交于点H.

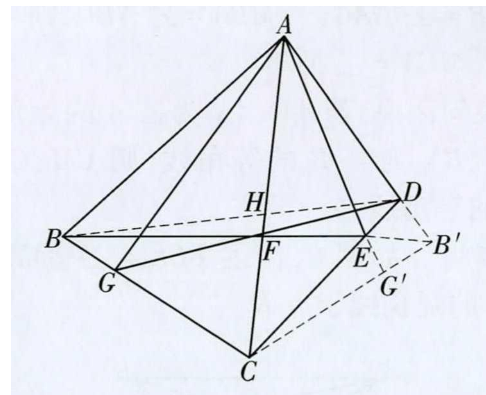

图5

对$\triangle BCD$和点F,运用塞瓦定理有

$\dfrac{CG}{GB}\cdot\dfrac{BH}{HD}\cdot\dfrac{DE}{EC}=1$.

在$\triangle ABD$中,由角平分线性质定理有

$\dfrac{BH}{HD}=\dfrac{AB}{AD}$.

因此,$\dfrac{CG}{GB}\cdot\dfrac{BA}{AD}\cdot\dfrac{DE}{EC}=1$.

延长AD,使得$AB'=BA$.联结$B'C$,在$B'C$上取一点G',使得$CG'=CG$.

则$B'G'=BG$.

故$\dfrac{CG'\cdot B'A\cdot DE}{G'B'\cdot AD\cdot EC}=\dfrac{CG}{GB}\cdot\dfrac{BA}{AD}\cdot\dfrac{DE}{EC}=1$.

由梅涅劳斯定理知G'、A、E三点共线,即点G'在直线AE上.

则$\angle GAC=\angle G'AC=\angle EAC$.

因此,AG和AE是关于$\angle BAD$的等角线.

由命题2可以通过构造四边形来求任一直线的等角线.若给定$\angle BAD$和任意直线AE,可以先作出$\angle BAD$的平分线AC,然后构造这样一个四边形:AB、AD为边,AC为$\angle BAD$的平分线,E在CD上,BE与AC交于点F,射线DF交BC于点G.那么,AG就是AE关于$\angle BAD$的等角线.

推论　在$\triangle ABC$中,$AD\perp BC$,O为AD上任意一点,BO的延长线交AC于点E,CO

的延长线交 AB 于点 F，则 $\angle EDA=\angle ADF$.

易知推论为命题2的一种特殊情况.

命题3　设 M、N 是 $\triangle ABC$ 内两点，若 $\angle MAB=\angle NAC$，$\angle MBA=\angle NBC$，则

$\angle MCA=\angle NCB$.

换句话说，若 AM、AN 为 $\angle A$ 的等角线，且 BM、BN 为 $\angle B$ 的等角线，则 CM、CN 为 $\angle C$ 的等角线.

证明　如图6，作 $\angle BCK=\angle BMA$，CK 交 BN 的延长线于点 K.

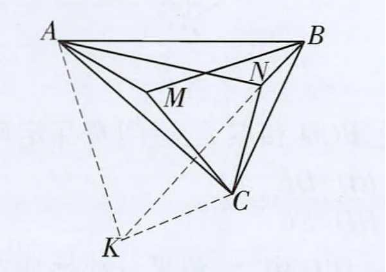

图6

因为 $\angle BMA>\angle BCA$，所以，点 K 必在 $\triangle ABC$ 的外部.

由 $\angle MBA=\angle CBK$，$\angle BCK=\angle BMA$

$\Rightarrow\triangle ABM\backsim\triangle KBC$

$\Rightarrow\dfrac{BA}{BK}=\dfrac{BM}{BC}$.

结合 $\angle ABK=\angle MBC$ 得

$\triangle ABK\backsim\triangle MBC$

$\Rightarrow\angle AKB=\angle MCB$.

又 $\angle MAB=\angle BKC$，$\angle MAB=\angle CAN$，则

$\angle BKC=\angle NKC=\angle CAN$

$\Rightarrow A$、K、C、N 四点共圆

$\Rightarrow\angle AKN=\angle ACN$.

从而，$\angle MCB=\angle ACN$.

因此，$\angle MCA=\angle NCB$.

【注】M、N 常常被称为 $\triangle ABC$ 的等角共轭点.

命题4　在 $\triangle ABC$ 中，AM 为中线，且 $\angle ABN=\angle MAB$，$\angle MAC=\angle ACN$，则 AM 和 AN 为 $\angle BAC$ 的等角线.

证明　如图7.

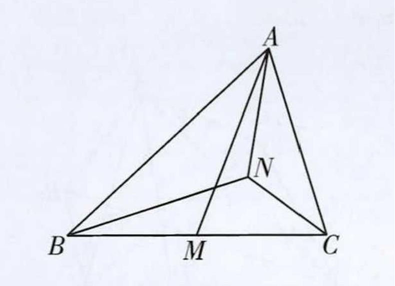

图7

因为 $\dfrac{BM}{MC}=\dfrac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ACM}}$

$=\dfrac{AB\cdot AM}{AC\cdot AM}\cdot\dfrac{\sin\angle MAB}{\sin\angle MAC}$

$=\dfrac{AB}{AC}\cdot\dfrac{\sin\angle MAB}{\sin\angle MAC}$，

所以，$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sin\angle ABN}{\sin\angle ACN}$.　①

又 $\dfrac{AN}{AB}=\dfrac{\sin\angle ABN}{\sin\angle ANB}$，

$\dfrac{AC}{AN}=\dfrac{\sin\angle CNA}{\sin\angle ACN}$，

故　$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sin\angle ABN}{\sin\angle ACN}\cdot\dfrac{\sin\angle CNA}{\sin\angle ANB}$.　②

由式①、②知

$\sin\angle CNA=\sin\angle ANB$，

即　$\angle CNA=\angle ANB$ 或

$\angle CNA=180^\circ-\angle ANB$.

（1）当 $\angle CNA=180^\circ-\angle ANB$ 时，B、N、C 三点共线，矛盾.

（2）当 $\angle CNA=\angle ANB$ 时，在 $\triangle ANB$ 与 $\triangle ANC$ 中，有

$\angle NBA+\angle BAN=\angle NAC+\angle ACN$.

因为 $\angle ABN=\angle MAB$，$\angle MAC=\angle ACN$，所以，

$\angle BAM+\angle BAN=\angle NAC+\angle MAC$，

即　$2\angle BAM+\angle MAN=2\angle NAC+\angle MAN$.

从而，$\angle BAM=\angle NAC$，即 AM 和 AN 为 $\angle BAC$ 的等角线.

中线的等角线又常被称为“陪位中线”.

等角线中还有很多有趣的性质，本文就不一一列举了，利用等角线的性质可以简捷

地处理一些竞赛中的平面几何问题.

2 应用举例

2.1 证明平面几何中垂直问题

例 1 设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，K 是 $\triangle BOC$ 的外心，直线 AB、AC 分别交 $\triangle BOC$ 的外接圆于另一点 M、N，L 是点 K 关于直线 MN 的对称点. 证明：$AL \perp BC$.

（第 26 届俄罗斯数学奥林匹克）

证明 如图 8.

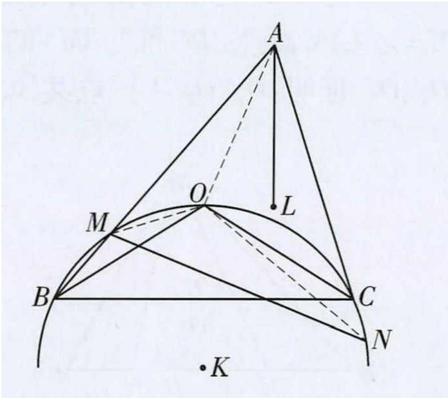

图 8

由 $\angle OMA=\angle OCB=90°-\angle BAC$

$\Rightarrow \angle OMA+\angle BAN=90°$

$\Rightarrow MO \perp AN$.

类似地，$NO \perp AM$.

这说明 O 为 $\triangle AMN$ 的垂心.

于是，$\triangle OMN$ 的外接圆与 $\triangle AMN$ 的外接圆是等圆，它们关于直线 MN 对称.

由于 K 是 $\triangle OMN$ 的外心，从而，L 是 $\triangle AMN$ 的外心. 故 AL 与 AO 是 $\angle BAC$ 的两条等角线，但 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，因此，$AL \perp BC$.

例 2 设 P 是外心为 O 的锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆的弧 $\overparen{BC}$（不含点 A）上任意一点，Q、R 两点分别在 AB、AC 上，且 $\angle QPB=\angle ACO$，$\angle CPR=\angle OBA$. 证明：$\angle PQR=\angle POC$，$\angle QRP=\angle BOP$.

（第 41 届罗马尼亚数学奥林匹克）

证明 如图 9，设直线 PQ、PR 分别交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 E、F.

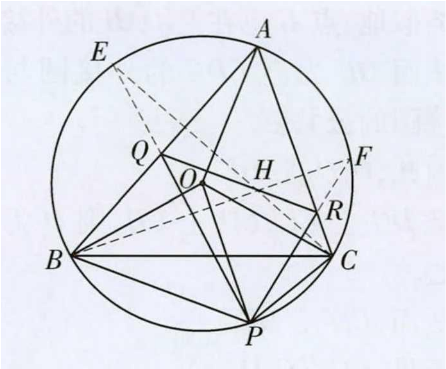

图 9

因为 $\angle ECB=\angle EPB=\angle ACO$，所以，$CE$、$CO$ 是 $\angle ACB$ 的两条等角线.

从而，$CE \perp AB$.

类似地，$BF \perp AC$.

故 CE 与 BF 的交点 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

考虑圆内接六边形 $ABFPEC$.

由帕斯卡定理知 Q、H、R 三点共线，即 H 在直线 QR 上.

注意到线段 HE 被 AB 垂直平分，所以，$QH=QE$.

因此，$\angle PQR=2\angle QEH=\angle POC$.

类似地，$\angle QRP=\angle BOP$.

例 3 在 $\triangle ABC$ 中，BC 的垂直平分线交 AC 于点 D，AC 的垂直平分线交 BC 于点 E，$\triangle ABC$ 与 $\triangle CDE$ 的外心分别为 O、O_1，$\triangle OAB$ 的外心为 O_2. 证明：四边形 CO_1O_2O 是一个平行四边形.

（2006，土耳其数学奥林匹克）

证明 如图 10.

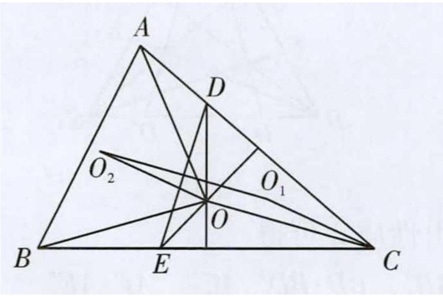

图 10

由 $\angle ODC=90°-\angle ACB=\angle OBA$

$\Rightarrow O$、D、A、B 四点共圆

$\Rightarrow$ 点 D 在 $\triangle OAB$ 的外接圆上.

类似地,点 E 也在 $\triangle OAB$ 的外接圆上.

从而 DE 为 $\triangle CDE$ 的外接圆与 $\triangle OAB$ 的外接圆的公共弦.

因此,$O_1O_2 \perp DE$.

又 $DO \perp EC$,$EO \perp CD$,则 O 为 $\triangle CDE$ 的垂心.

从而,$CO \perp DE$.

于是,$CO /\!/ O_1O_2$.

另一方面,因为 O、O_1 分别是 $\triangle CDE$ 的垂心、外心,由命题 1 可知 CO_1 与 CO 为 $\angle DCE$ 的两条等角线.

而由 A、B、E、O、D 五点共圆知

$\triangle ABC \backsim \triangle EDC$.

故 $CO_1 \perp AB$.

显然,$OO_2 \perp AB$,因此,

$CO_1 /\!/ OO_2$.

从而,四边形 CO_1O_2O 是平行四边形.

2.2 证明平面几何中三点共线问题

例 4 在 $\triangle ABC$ 中,D、D' 在边 BC 上,E、E' 在边 CA 上,F、F' 在边 AB 上,且直线 AD 与 AD'、BE 与 BE'、CF 与 CF' 分别关于 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的平分线对称. 证明:若 AD、BE、CF 三线共点,则 AD'、BE'、CF' 三线也共点.

证明 如图 11.

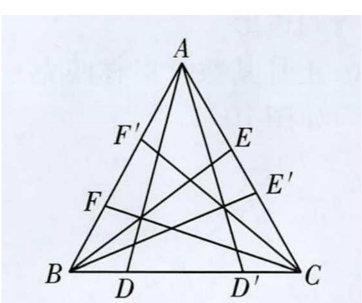

图 11

由性质 2 可得

$$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BD\cdot BD'}{CD\cdot CD'},\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{AF\cdot AF'}{BF\cdot BF'},$$

$$\frac{BC^2}{AB^2}=\frac{CE\cdot CE'}{AE\cdot AE'}.$$

则 $\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD'}{CD'}\cdot\frac{CE'}{AE'}\cdot\frac{AF'}{BF'}=1$.

又 AD、BE、CF 三线共点,由塞瓦定理得

$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1$.

故 $\frac{BD'}{CD'}\cdot\frac{CE'}{AE'}\cdot\frac{AF'}{BF'}=1$.

由塞瓦定理的逆定理得 AD'、BE'、CF' 三线也共点.

例 5 如图 12,在锐角 $\triangle ABC$ 中,$AB>AC$,M、N 是边 BC 上不同的两个点,使得 $\angle BAM=\angle CAN$. 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AMN$ 的外心分别为 O_1、O_2. 证明:O_1、O_2、A 三点共线.

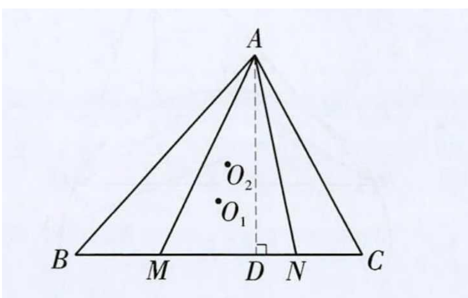

图 12

(2012,全国高中数学联合竞赛)

证明 因为 $\angle BAM=\angle CAN$,所以,AM、AN 是 $\angle BAC$ 的两条等角线.

作 $\triangle ABC$ 的高 AD,如图 12.

由性质 1 知 AO_1 是 AD 关于 $\angle MAN$ 的等角线.

则 AO_1 是 AD 关于 $\angle BAC$ 的等角线.

类似地,AO_2 也是 AD 关于 $\angle MAN$ 的等角线.

故 O_1、O_2、A 三点共线.

例 6 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A$ 的平分线与边 BC 交于点 D. 过点 C 且与 BC 垂直的直线交 $\angle A$ 的外角平分线于点 E,OA 与 BE 交于点 P. 证明:$PD \perp BC$,且 $PD=PA$. 其中 O 是 $\triangle ABC$ 的外心.

(2009,中国国家集训队选拔考试)

证明 如图 13,设过顶点 B 且与 BC 垂直的直线交 $\angle A$ 的外角平分线于点 F,直线

AO 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 K.

则由 $FB \perp BC, AB \perp BK$ 可知 BF 与 BK 是 $\angle B$ 的两条等角线.

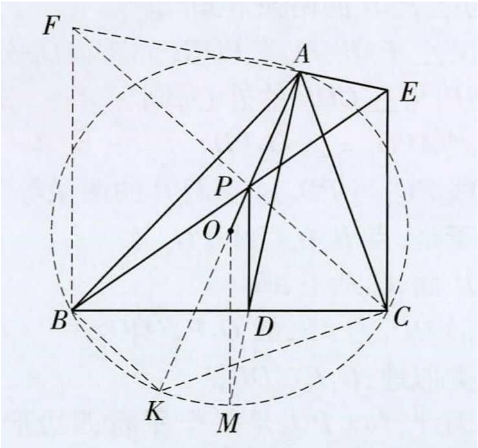

图 13

类似地，CE 与 CK 是 $\angle C$ 的两条等角线.

而 EF 是 $\angle A$ 的自等角线，由性质 3 可知 AO、BE、CF 三线交于一点，即 CF 也过点 P.

因为 $BF // CE$，所以，$\frac{BP}{PE}=\frac{BF}{CE}$.

在 $\triangle AFB$ 与 $\triangle AEC$ 中，因为

$\angle BAF=\angle CAE, \angle AFB+\angle AEC=180°$，

所以，$\frac{BF}{CE}=\frac{AB}{AC}$.

又 AD 是 $\angle A$ 的平分线，则$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

因而，$\frac{BP}{PE}=\frac{BD}{DC}$，这说明 $PD // EC$.

而 $EC \perp BC$，因此，$PD \perp BC$.

再设 $\angle A$ 的平分线与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 M.

则 $OM \perp BC$，且 $OM=OA$.

而 $PD \perp BC$，故 $PD=PA$.

例 7 设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AB_1C_1$ 反向相似，H、H_1 分别为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AB_1C_1$ 的垂心. 则 BB_1、CC_1、HH_1 三线共点或互相平行.

证明 若 $BB_1 // CC_1$，则 $\triangle ABC \cong \triangle AB_1C_1$，此时显然有 $HH_1 // BB_1 // CC_1$.

下设 BB_1 与 CC_1 交于点 P，BB_1 的垂直平分线与 CC_1 的垂直平分线交于点 Q. 如图 14.

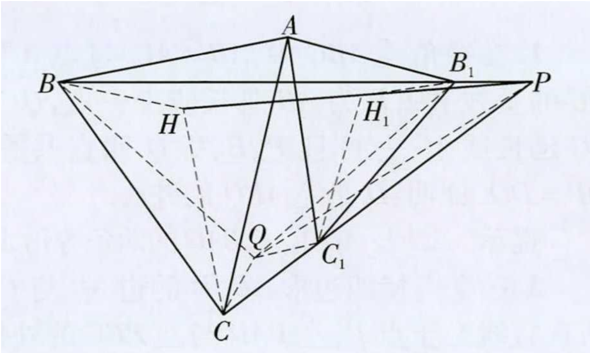

图 14

则 $QB=QB_1, QC=QC_1$.

取 Q' 为 BB_1 中垂线上一点，Q' 与 A 在 BB_1 异侧，使 $\angle BQ'B_1=2\angle ACB$.

令 B' 为 B 关于 AC 的对称点，B_1' 为 B_1 关于 AC_1 的对称点，M 为 BB_1 的中点，N 为 BB' 的中点.

则 $\triangle BCB' \backsim \triangle BQ'B_1$，

$\triangle BCN \backsim \triangle BQ'M$

$\Rightarrow \triangle BCQ' \backsim \triangle BB'B_1$（旋转）

$\Rightarrow CQ'=\frac{BQ'}{BB_1} \cdot B'B_1$.

类似地，$C_1Q'=\frac{BQ}{BB_1} \cdot B_1'B$.

而 $\triangle BAB_1' \cong \triangle B'AB_1 \Rightarrow B'B_1=B_1'B$

$\Rightarrow CQ'=C_1Q'$.

于是，点 Q' 与 Q 重合.

则 $\angle B_1QB=2\angle ACB, \angle CQC_1=2\angle CBA$.

故 $\angle QBB_1=90°-\angle ACB=\angle CBH$，

$\angle C_1CQ=90°-\angle CBA=\angle HCB$.

因此，BH、BQ 是 $\angle CBP$ 的两条等角线，CH、CQ 是 $\angle PCB$ 的两条等角线.

由命题 3 可知 H、Q 是 $\angle PBC$ 的两个等角共轭点. 因而 PH、PQ 是 $\angle BPC$ 的两条等角线.

类似地，PH_1、PQ 是 $\angle B_1PC_1$ 的两条等角线，即 PH、PH_1 都在 PQ 关于 $\angle BPC$ 的等角线上.

因此，H、H_1、P 三点共线.

练习题

1. 在锐角$\triangle ABC$中,$AB \neq AC$. 过点A作BC的垂线AD,P为AB延长线上一点,Q为AC延长线上一点,且P、B、C、Q四点共圆,$DP=DQ$. 证明:D是$\triangle APQ$的外心.

提示 AD与AO是$\angle BAC$的两条等角线.

2. $\odot O$内接四边形$ABCD$的边AB与CD所在直线交于点P,$\triangle PAD$与$\triangle PBC$的外接圆$\odot O_1$、$\odot O_2$的另一交点为Q. 证明:若P、Q不重合,则$OQ \perp PQ$.

(第26届IMO)

提示 PO_1与PO_2是$\angle DPA$的两条等角线.

3. 在$\triangle ABC$的形外作$\triangle ADB$与$\triangle ACE$,且$\angle DAB=\angle CAE$,$CE /\!/ BD$,CD与BE交于点P. 证明:$\angle BAP=\angle ECA$,$\angle PAC=\angle ABD$.

提示 过点B作BD关于$\angle CBA$的等角线,过点C作CE关于$\angle ACB$的等角线. 设所作两线交于点Q. 则由性质3知AQ、BE、CD三线共点.

4. 设四边形$ABCD$内接于$\odot O$,对角线AC与BD交于点P,$\triangle ABP$、$\triangle BCP$、$\triangle CDP$、$\triangle DAP$的外心分别为O_1、O_2、O_3、O_4. 证明:OP、O_1O_3、O_2O_4三线共点.

提示 设H为$\triangle PAB$的垂心.

因为O_1是$\triangle ABP$的外心,所以,PO_1与PH为$\angle PAB$的两条等角线.

又$\triangle PAB \backsim \triangle PDC$,而$O_1$、$O_3$分别为$\triangle ABP$与$\triangle CDP$的外心,则

$\angle APO_1=\angle O_3PD$,

即直线PO_1与PO_3为$\angle APB$的两条等角线.

于是,点H在直线PO_1上.

从而,$O_3P \perp AB$.

但$OO_1 \perp AB$,故$O_3P /\!/ OO_1$.

类似地,$O_1P /\!/ OO_3$.

因此,OO_1PO_3是一个平行四边形,O_1O_3经过OP中点.

5. 设一圆与$\triangle ABC$的边AB、AC都相切,且与$\triangle ABC$的外接圆切于点T. D是弧$\overparen{BAC}$的中点,I是$\triangle ABC$的内心. 证明:T、I、D三点在一条直线上.

(2002,伊朗国家选拔考试)

提示 由曼海姆定理知I是PQ的中点. 而AP、AQ为切线,故TA、TI为$\angle QTP$的两条等角线.

稿　约

本刊是以报道中学数学课外活动和数学竞赛为中心内容的专业刊物。欢迎作者为数学活动课程讲座、命题与解题、从高考到竞赛、赛题另解、学生习作、问题赏析、初等数学研究、数海拾贝、课外训练、数学奥林匹克问题等栏目撰稿。来稿请注意:

1. 内容新颖,形式活泼,提倡短小精悍,讲清一、两个问题即可,不要"大而全"。稿件一般不超过3 000字,长文不超过5 000字。

2. 讲座稿应附有相应的练习题(5~7个),并随练习题给出提示。

3. 文中例题最好选用近几年国内外的竞赛试题,并标出竞赛全称、届次和时间。

4. 凡为本刊课外训练和数学奥林匹克问题栏目提供的稿件,请注意:试题内容范围以中国数学会普及工作委员会制定的《数学竞赛大纲》为准;题目要有新意(不能用成题),并注明是自编或改编,改编题需注明原题出处。

5. 稿件排版格式规范,插图力求准确并随文绘出,外文字母的正斜体、大小写、上下角标清楚,准确无误。

6. 参考文献请用顺序编码制,在正文引用处注明。

7. 本刊已加入多个数据库并在网上发行,如作者不同意所著文章被数据库收录,请在来稿时声明。来稿三个月未收到录用通知可自行处理,恕不退稿。为联系方便,请注明联系电话、邮箱。

收稿邮箱:zdsxlx@163.com。