

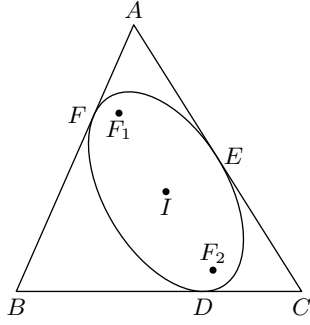


图 1

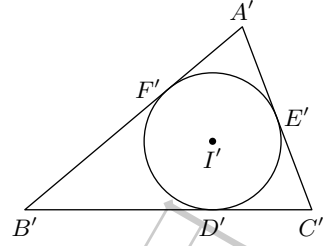


图 2

如图 1, $\triangle ABC$ 的内切椭圆的中心是 I , 两焦点分别是 F_1, F_2 , 与边 BC, CA, AB 的切点分别是 D, E, F , $BC = a, CA = b, AB = c$, 那么必定可以从一个三角形的内切圆通过射影变换得到 $\triangle ABC$ 的这个内切椭圆。设 $\triangle A'B'C'$ 的内切圆 I' 与边 $B'C', C'A', A'B'$ 的切点分别是 D', E', F' , $\triangle A'B'C'$ 经过射影变换后变成 $\triangle ABC$, 点 D', E', F' 分别变成点 D, E, F (图 2)。根据射影变换的性质, 必定有

$$\frac{BD}{DC} = \frac{B'D'}{D'C'}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{C'E'}{E'A'}, \quad \frac{AF}{FB} = \frac{A'F'}{F'B'},$$

因为

$$E'A' = A'F', \quad F'B' = B'D', \quad D'C' = C'E',$$

所以

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{C'E'}{E'A'} \cdot \frac{A'F'}{F'B'} \cdot \frac{A'F'}{F'B'} = 1,$$

由 Menelaus 定理的逆定理知直线 AD, BE, CF 共点, 所以只要点 D, E, F 任意两个确定后第三个点便可确定。因为点 I' 必定在 $\triangle D'E'F'$ 内, 所以点 I 也必定在 $\triangle DEF$ 内, 点 D, E, F 关于点 O 的对称点是 D'', E'', F'' , 则点 D, E, F, D'', E'', F'' 没有四点共线, 所以过点 D, E, F, D'', E'', F'' 的椭圆是唯一的, 以点 D, E, F 的 $\triangle ABC$ 的内切椭圆是唯一的。

设 $BD = ty, DC = tz, CE = uz, EA = ux, AF = vx, FB = vy$, 其中 t, u, v, x, y, z 都是正数, $S_{\triangle ABC} = S$, 椭圆长半轴长是 p , 短半轴长是 q , 则必定

$$E'A' : A'F' : F'B' : B'D' : D'C' : C'E' = x : x : y : y : z : z,$$

不妨设 $B'C' = a' = y + z, C'A' = b' = x + z, A'B' = c' = x + y$, $\triangle A'B'C'$ 的面积是 S' , 内切圆圆心是 I' , 则由射影变换的性质得

$$S_{\triangle IBC} : S_{\triangle ICA} : S_{\triangle IAB} = S_{\triangle I'B'C'} : S_{\triangle I'C'A'} : S_{\triangle I'A'B'} = a' : b' : c', \quad (1)$$

所以

$$S_{\triangle IBC} = \frac{a'S}{a' + b' + c'}, \quad S_{\triangle ICA} = \frac{b'S}{a' + b' + c'}, \quad S_{\triangle IAB} = \frac{c'S}{a' + b' + c'},$$

因为 I 是 F_1F_2 的中点, 所以

$$\begin{aligned} S_{\triangle F_1BC} + S_{\triangle F_2BC} &= \frac{2a'S}{a' + b' + c'}, \\ S_{\triangle F_1CA} + S_{\triangle F_2CA} &= \frac{2b'S}{a' + b' + c'}, \\ S_{\triangle F_1AB} + S_{\triangle F_2AB} &= \frac{2c'S}{a' + b' + c'}. \end{aligned}$$

设

$$S_{\triangle F_1BC} = \frac{a'S}{a' + b' + c'} + S_A, \quad S_{\triangle F_2BC} = \frac{a'S}{a' + b' + c'} - S_A,$$

$$S_{\triangle F_1 CA} = \frac{b'S}{a' + b' + c'} + S_B, \quad S_{\triangle F_2 CA} = \frac{b'S}{a' + b' + c'} - S_B,$$

$$S_{\triangle F_1 AB} = \frac{c'S}{a' + b' + c'} + S_C, \quad S_{\triangle F_2 CA} = \frac{c'S}{a' + b' + c'} - S_C,$$

其中

$$S_A + S_B + S_C = 0.$$

因为

$$\frac{S_{\triangle F_1 BC} S_{\triangle F_2 BC}}{a^2} = \frac{S_{\triangle F_1 CA} S_{\triangle F_2 CA}}{b^2} = \frac{S_{\triangle F_1 AB} S_{\triangle F_2 AB}}{c^2} = \frac{q^2}{4},$$

所以

$$\frac{\left(\frac{a'S}{a' + b' + c'}\right)^2 - S_A^2}{a^2} = \frac{\left(\frac{b'S}{a' + b' + c'}\right)^2 - S_B^2}{b^2} = \frac{\left(\frac{c'S}{a' + b' + c'}\right)^2 - S_C^2}{c^2} = \frac{q^2}{4}.$$

即得

$$S_A^2 = \left(\frac{a'S}{a' + b' + c'}\right)^2 - \frac{a^2 q^2}{4}, \quad S_B^2 = \left(\frac{b'S}{a' + b' + c'}\right)^2 - \frac{b^2 q^2}{4}, \quad S_C^2 = \left(\frac{c'S}{a' + b' + c'}\right)^2 - \frac{c^2 q^2}{4}.$$

因为

$$S_A + S_B + S_C = 0,$$

所以

$$\begin{aligned} & 2S_A^2 S_B^2 + 2S_A^2 S_C^2 + 2S_B^2 S_C^2 - S_A^4 + S_B^4 + S_C^4 \\ &= (S_A + S_B + S_C)(-S_A + S_B + S_C)(S_A - S_B + S_C)(S_A + S_B - S_C) \\ &= 0, \end{aligned}$$

把 S_A^2 、 S_B^2 、 S_C^2 的值代入上式，整理得

$$\begin{aligned} & 2(a' + b' + c')^4 q^4 \\ & - (a' + b' + c')^2 (a'^2 (-a'^2 + b'^2 + c'^2) + b^2 (a'^2 - b'^2 + c'^2) + c^2 (a'^2 + b'^2 - c'^2)) q^2 \\ & + 32S^2 S'^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \alpha &= a^2 (-a'^2 + b'^2 + c'^2) + b^2 (a'^2 - b'^2 + c'^2) + c^2 (a'^2 + b'^2 - c'^2), \\ \beta &= a^4 b'^2 c'^2 + a'^2 b^4 c'^2 + a'^2 b'^2 c^4 - a^2 b^2 c'^2 (a'^2 + b'^2 - c'^2) - a^2 b'^2 c^2 (a'^2 - b'^2 + c'^2) - a'^2 b^2 c^2 (-a'^2 + b'^2 + c'^2), \end{aligned}$$

则

$$q^2 = \frac{64S^2 S'^2}{(a' + b' + c')^2 (\alpha + 2\sqrt{\beta})} \text{ 或 } q^2 = \frac{64S^2 S'^2}{(a' + b' + c')^2 (\alpha - 2\sqrt{\beta})}.$$

因为

$$\alpha^2 - 4\beta = 256S^2 S'^2 > 0,$$

经计算，得

$$\left(\frac{a'S}{a' + b' + c'}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \cdot \frac{64S^2 S'^2}{(a' + b' + c')^2 (\alpha - 2\sqrt{\beta})} = \left(\frac{S}{a' + b' + c'}\right)^2 \cdot \frac{a'^2 \alpha - 16a^2 S'^2 - 2a'^2 \sqrt{\beta}}{\alpha - 2\sqrt{\beta}},$$

但是

$$(a'^2 \alpha - 16a^2 S'^2)^2 - 4a'^4 \beta = -16S'^2 (a^2 b'^2 - a'^2 b^2 - a^2 c'^2 + a'^2 c^2)^2 \leq 0,$$

即 $S_A^2 \leq 0$, 这是不可能的, 所以只能

$$q^2 = \frac{64S^2S'^2}{(a' + b' + c')^2(\alpha + 2\sqrt{\beta})},$$

即

$$q = \frac{8SS'}{(a' + b' + c')\sqrt{\alpha + 2\sqrt{\beta}}},$$

由此知所有满足条件的解中 $|S_A|$ 、 $|S_B|$ 、 $|S_C|$ 的值都是分别相等的。若 $S_A = S_B = S_C = 0$ 则两焦点重合, 此时椭圆就是 $\triangle ABC$ 的内切圆; 若 S_A 、 S_B 、 S_C 有一个是 0, 则另外两个互为相反数; 若 S_A 、 S_B 、 S_C 都不是 0, 不妨设 $S_A < 0 < S_B \leq S_C$, 则 $-|S_A| + |S_B| + |S_C| = 0$, S_A 、 S_B 、 S_C 都变为原数的相反数时仍然是解, 其他情况, 例如 S_A 、 S_B 都是负数、 S_C 是正数, 那么 $S_A + S_B + S_C = -|S_A| - |S_B| + |S_C| = -2|S_B| < 0$, 所以只能有两组解。由此便可确定 $S_{\triangle F_1BC}$ 、 $S_{\triangle F_2BC}$ 、 $S_{\triangle F_1CA}$ 、 $S_{\triangle F_2CA}$ 、 $S_{\triangle F_1AB}$ 、 $S_{\triangle F_2AB}$ 的值, 这两组解对应椭圆的两个焦点。

设 $\triangle A'B'C'$ 的内切圆半径是 r' , 则

$$r' = \frac{2S'}{a' + b' + c'},$$

由射影变换的性质得

$$\frac{\pi pq}{\pi r'^2} = \frac{S}{S'},$$

所以

$$p = \frac{\sqrt{\alpha + 2\sqrt{\beta}}}{2(a' + b' + c')}.$$

若给定三角形以及内切椭圆的中心, 则由 (1) 便可确定切点, 然后就可以用上面的结论了; 若给定三角形以及内切椭圆的一个焦点, 则另一焦点是这个交点关于这个三角形的等角共轭点, 其中心就是两焦点的中点, 由 (1) 便可确定切点, 然后就可以用上面的结论了。

对于 $\triangle ABC$ 与点 A 在直线 BC 两侧的旁切椭圆, 也可利用上述方法求出旁切椭圆的中心、焦点、长半轴、短半轴。设内切椭圆的旁心是 I , 两焦点分别是 F_1 、 F_2 , 与边 BC 、 CA 、 AB 的切点分别是 D 、 E 、 F , $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $BD = ty$, $DC = tz$, $CE = uz$, $EA = ux$, $AF = vx$, $FB = vy$, 其中 t 、 u 、 v 、 x 、 y 、 z 都是正数, $S_{\triangle ABC} = S$, 椭圆长半轴长是 p , 短半轴长是 q , $B'C' = a' = y + z$, $C'A' = b' = x + z$, $A'B' = c' = x + y$, $\triangle A'B'C'$ 的面积是 S' ,

$$\begin{aligned}\alpha &= a^2(-a'^2 + b'^2 + c'^2) + b^2(a'^2 - b'^2 + c'^2) + c^2(a'^2 + b'^2 - c'^2), \\ \beta &= a^4b'^2c'^2 + a'^2b^4c'^2 + a'^2b^2c'^4 - a^2b^2c'^2(a'^2 + b'^2 - c'^2) - a^2b^2c'^2(a'^2 - b'^2 + c'^2) - a'^2b^2c'^2(-a'^2 + b'^2 + c'^2),\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}p &= \frac{\sqrt{\alpha + 2\sqrt{\beta}}}{2(-a' + b' + c')}, \\ q &= \frac{8SS'}{(-a' + b' + c')\sqrt{\alpha + 2\sqrt{\beta}}}, \\ S_{\triangle IBC} : S_{\triangle ICA} : S_{\triangle IAB} &= S_{\triangle I'B'C'} : S_{\triangle I'C'A'} : S_{\triangle I'A'B'} = a' : b' : c', \\ \frac{S_{\triangle F_1BC}S_{\triangle F_2BC}}{a^2} &= \frac{S_{\triangle F_1CA}S_{\triangle F_2CA}}{b^2} = \frac{S_{\triangle F_1AB}S_{\triangle F_2AB}}{c^2} = \frac{q^2}{4}.\end{aligned}$$

其他位置的旁切椭圆类似可确定。椭圆的中心在切点所围成的三角形外部, 点 I 与点 D 在直线 BC 异侧, 点 I 与点 E 在直线 CA 同侧, 点 I 与点 F 在直线 AB 同侧。给定三角形以及切点或给定三角形以及椭圆中心或给定三角形以及一焦点旁切椭圆都是唯一确定的。切点与切点所在直线的边所对的三角形顶点连线共点。