

为了方便讨论, 首先定义三角形的有向面积。对于给定 $\triangle ABC$, D 是 $\triangle ABC$ 所在平面内任意一点, 定义 $\overline{S_{\triangle BCD}}$ 的值是 $\triangle BCD$ 的有向面积, 其值规定如下: $|\overline{S_{\triangle BCD}}| = S_{\triangle BCD}$; 当点 A 、 D 在直线 BC 同侧时是正的; 当点 A 、 D 在直线 BC 异侧时是负的; 当 D 在直线 BC 上时是 0。 $\overline{S_{\triangle CAD}}$ 、 $\overline{S_{\triangle ABD}}$ 的值类似上述定义。对于其他三角形与三角形一边重合的三角形的有向面积均如上述定义。定义符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & (x > 0 \text{ 时}), \\ 0 & (x = 0 \text{ 时}), \\ -1 & (x < 0 \text{ 时}). \end{cases}$$

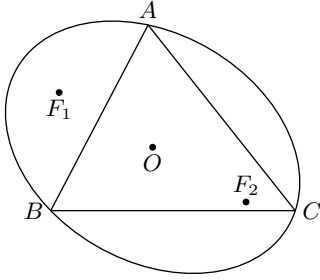


图 1

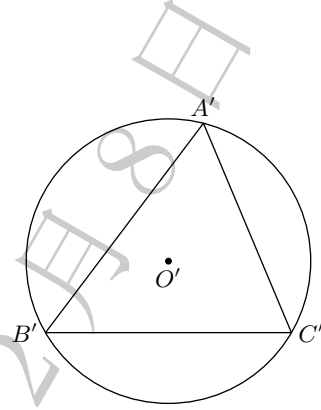


图 2

如图 1, 设 $\triangle ABC$ 的外接椭圆的中心是 O , 两焦点分别是 F_1 、 F_2 , 长半轴长是 p , 短半轴长是 q , $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\overline{S_{\triangle OBC}} : \overline{S_{\triangle OCA}} : \overline{S_{\triangle OAB}} = \alpha : \beta : \gamma$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$ 。设这个椭圆是由 $\triangle A'B'C'$ 的外接圆 (图 2) 通过射影变换得到的, 点 A' 变成点 A , 点 B' 变成点 B , 点 C' 变成点 C , 且 $S_{\triangle A'B'C'} = 1$, $\triangle A'B'C'$ 的外接圆圆心是 O' , 半径是 R' , 内切圆圆心是 I' , 半径是 r' , 内切圆 I' 变成的椭圆 I' 长半轴长是 p_1 , 短半轴长是 q_1 , 则点 O' 变成点 O , 椭圆 O 的长轴、短轴分别与椭圆 I 的长轴、短轴平行, 且

$$\frac{p}{p_1} = \frac{q}{q_1} = \frac{R'}{r'}.$$

设 $B'C' = a'$, $C'A' = b'$, $A'B' = c'$, 由射影变换的性质得

$$\overline{S_{\triangle O'B'C'}} = \alpha, \quad \overline{S_{\triangle O'C'A'}} = \beta, \quad \overline{S_{\triangle O'A'B'}} = \gamma,$$

由此得

$$\begin{cases} a'^2 (b'^2 + c'^2 - a'^2) = 16\alpha, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b'^2 (c'^2 + a'^2 - b'^2) = 16\beta, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c'^2 (a'^2 + b'^2 - c'^2) = 16\gamma. & (3) \end{cases}$$

若点 O 都不在直线 BC 、 CA 、 AB 上, A 、 B 、 C 关于点 O 的对称点分别是 A' 、 B' 、 C' , 则 A 、 B 、 C 、 A' 、 B' 、 C' 都在外接椭圆上, 且没有任何四点共线, 此时 $\triangle ABC$ 的外接椭圆是唯一确定的, 且 $\alpha\beta\gamma \neq 0$ 。
((1) - (2))/(3) 得

$$\frac{a'^2 - b'^2}{c'^2} = \frac{\beta - \alpha}{\gamma},$$

同理可得

$$\frac{a'^2 - c'^2}{b'^2} = \frac{\gamma - \alpha}{\beta}, \quad \frac{b'^2 - c'^2}{a'^2} = \frac{\gamma - \beta}{\alpha},$$

可设

$$a'^2 = t\alpha, \quad b'^2 = u\beta, \quad c'^2 = v\gamma,$$

$$b'^2 - c'^2 = t(\gamma - \beta), \quad a'^2 - c'^2 = u(\gamma - \alpha), \quad a'^2 - b'^2 = v(\beta - \alpha),$$

把上一组值代入下面的方程中，可得

$$t : u : v = (-\alpha + \beta + \gamma) : (\alpha - \beta + \gamma) : (\alpha + \beta - \gamma),$$

令

$$t = (-\alpha + \beta + \gamma)k, \quad u = (\alpha - \beta + \gamma)k, \quad v = (\alpha + \beta - \gamma)k,$$

则

$$a'^2 = \alpha(-\alpha + \beta + \gamma)k, \quad b'^2 = \beta(\alpha - \beta + \gamma)k, \quad c'^2 = \gamma(\alpha + \beta - \gamma)k,$$

把上述值代入 (1)，得

$$k = \pm \frac{4}{\sqrt{(-\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)}} = \pm \frac{4}{(1 - 2\alpha)(1 - 2\beta)(1 - 2\gamma)},$$

要使 $\triangle A'B'C'$ 存在，必须 $(1 - 2\alpha)(1 - 2\beta)(1 - 2\gamma) > 0$ 。因为 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ ，所以 α, β, γ 中最多两个是负数，不妨设 $\alpha < 0, \beta < 0$ ，则必定 $0 < \gamma < 1, 1 - 2\alpha > 0, 1 - 2\beta > 0$ ，由 $0 < \gamma < 1$ 得 $1 - 2\gamma < 0$ ，由 $(1 - 2\alpha)(1 - 2\beta)(1 - 2\gamma) > 0$ 得 $1 - 2\gamma > 0$ ，产生矛盾；若 $\alpha > 0, \beta > 0, 1 - 2\alpha > 0, 1 - 2\beta < 0$ ，由 $(1 - 2\alpha)(1 - 2\beta)(1 - 2\gamma) > 0$ 得 $1 - 2\gamma < 0$ ，由 $1 - 2\beta < 0, 1 - 2\gamma < 0$ 得 $\frac{1}{2} < \beta < 1, \frac{1}{2} < \gamma < 1$ ，所以 $\beta + \gamma > 1$ ，与 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ 矛盾。由此得无论 α, β, γ 的符号如何，总有

$$\begin{cases} a' = 2|\alpha| \sqrt{\left| \frac{1 - 2\alpha}{(1 - 2\beta)(1 - 2\gamma)} \right|}, \\ b' = 2|\beta| \sqrt{\left| \frac{1 - 2\beta}{(1 - 2\alpha)(1 - 2\gamma)} \right|}, \\ c' = 2|\gamma| \sqrt{\left| \frac{1 - 2\gamma}{(1 - 2\alpha)(1 - 2\beta)} \right|}. \end{cases}$$

设

$$\begin{aligned} U &= \operatorname{sgn} \alpha |(1 - 2\beta)(1 - 2\gamma)| a^2 + \operatorname{sgn} \beta |(1 - 2\alpha)(1 - 2\gamma)| b^2 + \operatorname{sgn} \gamma |(1 - 2\alpha)(1 - 2\beta)| c^2, \\ V &= |\beta\gamma(1 - 2\beta)(1 - 2\gamma)| a^4 + |\alpha\gamma(1 - 2\alpha)(1 - 2\gamma)| b^4 + |\alpha\beta(1 - 2\alpha)(1 - 2\beta)| c^4 \\ &\quad - |(1 - 2\alpha)(1 - 2\beta)(1 - 2\gamma)| (\gamma a^2 b^2 + \beta a^2 c^2 + \alpha b^2 c^2), \end{aligned}$$

由三角形内切椭圆的结论整理化简得

$$p = \sqrt{\left| \frac{\alpha\beta\gamma}{(1 - 2\alpha)(1 - 2\beta)(1 - 2\gamma)} \right|} (U + 2\sqrt{V}), \quad q = \sqrt{\frac{|\alpha\beta\gamma|}{U + 2\sqrt{V}}} \cdot S_{\triangle ABC}.$$

因为点 O 是 F_1F_2 的中点，所以

$$\overline{S_{F_1BC}} + \overline{S_{F_2BC}} = \alpha S_{\triangle ABC}, \quad \overline{S_{F_1CA}} + \overline{S_{F_2CA}} = \beta S_{\triangle ABC}, \quad \overline{S_{F_1AB}} + \overline{S_{F_2AB}} = \gamma S_{\triangle ABC}.$$

设椭圆 I 的焦点分别是 F'_1, F'_2 ，点 F_1, F'_1 在直线 OI 同侧，点 F_2, F'_2 在直线 OI 同侧，则

$$\left(\alpha S_{\triangle ABC} + \frac{r'}{R'} (\overline{S_{F_1BC}} - \alpha S_{\triangle ABC}) \right) + \frac{a}{a + b + c} S_{\triangle ABC} = \alpha S_{\triangle ABC} + S_{F'_1BC},$$

所以

$$S_{F'_1BC} = \frac{a}{a + b + c} S_{\triangle ABC} + \frac{r'}{R'} (\overline{S_{F_1BC}} - \alpha S_{\triangle ABC}),$$

同理得

$$S_{F'_2BC} = \frac{a}{a + b + c} S_{\triangle ABC} + \frac{r'}{R'} (\overline{S_{F_2BC}} - \alpha S_{\triangle ABC}),$$

由内切椭圆焦点的结论整理化简得

$$\overline{S_{F_1BC}} \cdot \overline{S_{F_2BC}} = \frac{a^2 q^2}{4} - \left(4 \left| \frac{\beta \gamma}{(1-2\beta)(1-2\gamma)} \right| - 1 \right) \alpha^2 S_{\triangle ABC}^2,$$

同理可得

$$\begin{aligned} \overline{S_{F_1CA}} \cdot \overline{S_{F_2CA}} &= \frac{b^2 q^2}{4} - \left(4 \left| \frac{\alpha \gamma}{(1-2\alpha)(1-2\gamma)} \right| - 1 \right) \beta^2 S_{\triangle ABC}^2, \\ \overline{S_{F_1AB}} \cdot \overline{S_{F_2AB}} &= \frac{c^2 q^2}{4} - \left(4 \left| \frac{\alpha \beta}{(1-2\alpha)(1-2\beta)} \right| - 1 \right) \gamma^2 S_{\triangle ABC}^2. \end{aligned}$$

类似内切椭圆的讨论知 $\overline{S_{F_1BC}}$ 、 $\overline{S_{F_2BC}}$ 、 $\overline{S_{F_1CA}}$ 、 $\overline{S_{F_2CA}}$ 、 $\overline{S_{F_1AB}}$ 、 $\overline{S_{F_2AB}}$ 只有两组解。

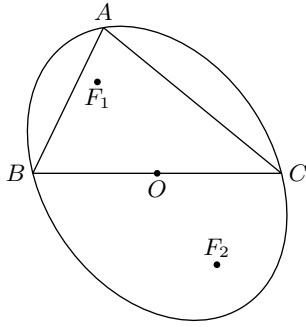


图 3

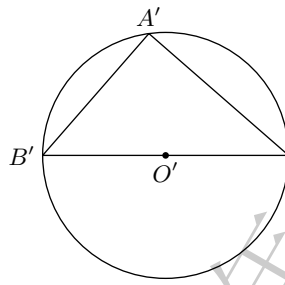


图 4

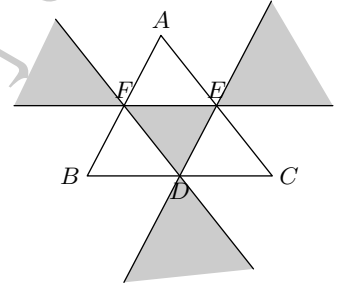


图 5

若点 O 都在直线 BC 、 CA 、 AB 其中之一上，例如点 O 在直线 BC 上，由 (1) 得

$$a'^2 = b'^2 + c'^2,$$

即 $\angle A' = 90^\circ$ ，再由 (2)、(3) 得

$$8\beta = 8\gamma = b'^2 c'^2,$$

所以

$$\alpha = 0, \quad \beta = \gamma = \frac{1}{2},$$

即点 O 是 BC 的中点 (图 3)， $\triangle A'B'C'$ 是 $\angle A'$ 是直角的直角三角形 (图 4)，综合上面的讨论知点 O 在图 5 所示直线 DE 、 DF 、 EF 所围的灰色区域内 (不包含边界，但包含点 D 、 E 、 F) 时 $\triangle ABC$ 的外接椭圆才存在，其中点 D 、 E 、 F 分别是 BC 、 CA 、 AB 的中点。类似上面的计算讨论，设

$$U = b^2 c'^2 + b'^2 c^2, \quad V = a'^2 (b^4 c'^2 + b'^2 c^4) - a^2 b'^2 c'^2 (-a^2 + 2b^2 + 2c^2),$$

则

$$p = \frac{a'}{4b'c'} \sqrt{2(U + \sqrt{V})}, \quad q = \sqrt{\frac{2}{U + \sqrt{V}}} a' S_{\triangle ABC},$$

$$\overline{S_{F_1BC}} + \overline{S_{F_2BC}} = 0, \quad \overline{S_{F_1CA}} + \overline{S_{F_2CA}} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}, \quad \overline{S_{F_1AB}} + \overline{S_{F_2AB}} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC},$$

$$\overline{S_{F_1BC}} \cdot \overline{S_{F_2BC}} = \frac{a^2 q^2}{4} - \frac{a'^4}{4b'^2 c'^2} S_{\triangle ABC}^2,$$

$$\overline{S_{F_1CA}} \cdot \overline{S_{F_2CA}} = \frac{b^2 q^2}{4} - \frac{b'^2}{4c'^2} S_{\triangle ABC}^2,$$

$$\overline{S_{F_1AB}} \cdot \overline{S_{F_2AB}} = \frac{c^2 q^2}{4} - \frac{c'^2}{4b'^2} S_{\triangle ABC}^2.$$