与三角形、四边形相切、外接的圆锥曲线

何万程

2023 年 2 月 16 日

$AB=a$ 表示有向线段 AB 的有向长度为 a，$|AB|$ 表示线段 AB 的长度．以下令

$$
\begin{aligned}
f(x,y)&=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33},\\
f_1(x,y)&=a_{11}x+a_{12}y+a_{13},\\
f_2(x,y)&=a_{12}x+a_{22}y+a_{23},\\
f_3(x,y)&=a_{13}x+a_{23}y+a_{33},\\
\varPhi(x,y)&=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2,\\
\varPhi_1(x,y)&=a_{11}x+a_{12}y,\\
\varPhi_2(x,y)&=a_{12}x+a_{22}y,\\
\varPhi_3(x,y)&=a_{13}x+a_{23}y.
\end{aligned}
$$

容易得

$$
\begin{aligned}
&f(x,y)=f_1(x,y)x+f_2(x,y)y+f_3(x,y),\\
&f_1(p,q)t+f_2(p,q)u+f_3(p,q)=f_1(t,u)p+f_2(t,u)q+f_3(t,u),\\
&\varPhi(x,y)=\varPhi_1(x,y)x+\varPhi_2(x,y)y,\\
&\varPhi_1(p,q)t+\varPhi_2(p,q)u=\varPhi_1(t,u)p+\varPhi_2(t,u)q,\\
&f_1(p,q)t+f_2(p,q)u=\varPhi_1(t,u)p+\varPhi_2(t,u)q+\varPhi_3(t,u).
\end{aligned}
$$

再令

$$
\begin{aligned}
&I_1=a_{11}+a_{22},\\
&I_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2,\\
&I_3=-a_{11}a_{23}^2-a_{22}a_{13}^2-a_{12}^2a_{33}+a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{12}a_{13}a_{23}.
\end{aligned}
$$

定理 1. 圆锥曲线 $f(x,y)=0$ 的离心率是 e，则 $I_2e^4+(I_1^2-4I_2)(e^2-1)=0$.

证明： 设圆锥曲线 $f(x,y)=0$ 的特征根是 λ_1、λ_2，则 λ_1、λ_2 是方程

$$t^2-I_1t+I_2=0$$

的根，所以 $\lambda_1+\lambda_2=I_1$，$\lambda_1\lambda_2=I_2$．规定当 λ_1、λ_2 都是正数或都是负数时 $|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|$，其余情况时 λ_1 与 $-I_2I_3$ 同号.

当 $\lambda_1\lambda_2\neq 0$ 时

$$e^2=\frac{\dfrac{1}{\lambda_1}-\dfrac{1}{\lambda_2}}{\dfrac{1}{\lambda_1}}=1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

所以

$$e^2=1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=1-\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2^2}=1-\frac{I_2}{I_2\lambda_2-I_2},$$

此时必定 $e\neq 1$，若 $I_1\neq 0$ 由上式得

$$\lambda_2=\frac{(e^2-2)I_2}{(e^2-1)I_1},$$

代入

$$\lambda_2^2-I_1\lambda_2+I_2=0$$

整理得

$$I_2e^4+(I_1^2-4I_2)(e^2-1)=0;$$

若 $I_1=0$，此时必定 $e=\sqrt{2}$，上式仍成立.

当 λ_1、λ_2 其中之一是 0 时必定 $I_2=0$，$e=1$，$I_2e^4+(I_1^2-4I_2)(e^2-1)=0$ 仍成立.

综上所述，必定 $I_2e^4+(I_1^2-4I_2)(e^2-1)=0$. □

三角形的相切圆锥曲线

根据 Brianchon 定理，三角形的一顶点与内切或旁切圆锥曲线对边所在直线的切点连线，这三条直线是共点的．以下的面积除了特别说明以外都表示有向面积.

定理 2. 圆锥曲线的中心是 O，且与直线 BC、CA、AB 分别相切于点 D、E、F，$BD:DC=k_2:k_3$，$CE:EA=k_3:k_1$，$AF:FB=k_1:k_2$，$a=k_2+k_3$，$b=k_3+k_1$，$c=k_1+k_2$，$\triangle OBC$、$\triangle OCA$、$\triangle OAB$ 的有向面积分别是 S_1、S_2、S_3，则 $S_1:S_2:S_3=a:b:c$，当圆锥曲线是椭圆时有 $k_1k_2k_3(k_1+k_2+k_3)>0$，当圆锥曲线是双曲线时有 $k_1k_2k_3(k_1+k_2+k_3)<0$.

证明： 椭圆都可以由圆经过仿射变换得到，$k_1k_2k_3(k_1+k_2+k_3)$ 是仿射变换前三角形的面积的平方，由圆的结论就可以得到命题的结论，所以只需要讨论双曲线的情形.

设双曲线 $\dfrac{x^2}{p^2}-\dfrac{y^2}{q^2}=1$ 的切点 D、E、F 的坐标分别是

$$\begin{aligned}(x_D,y_D)&=\left(\frac{p}{2}\left(t_D+\frac{1}{t_D}\right),\frac{q}{2}\left(t_D-\frac{1}{t_D}\right)\right),\\(x_E,y_E)&=\left(\frac{p}{2}\left(t_E+\frac{1}{t_E}\right),\frac{q}{2}\left(t_E-\frac{1}{t_E}\right)\right),\\(x_F,y_F)&=\left(\frac{p}{2}\left(t_F+\frac{1}{t_F}\right),\frac{q}{2}\left(t_F-\frac{1}{t_F}\right)\right),\end{aligned}$$

因为直线 BC、CA、AB 的方程分别是

$$\frac{x_Dx}{p^2}-\frac{y_Dy}{q^2}=1,\ \frac{x_Ex}{p^2}-\frac{y_Ey}{q^2}=1,\ \frac{x_Fx}{p^2}-\frac{y_Fy}{q^2}=1,$$

把点 D、E、F 的坐标代入上面的方程，两两组成方程组，便可求得点 A、B、C 的坐标分别是

$$\begin{aligned}(x_A,y_A)&=\left(\frac{p(t_Et_F+1)}{t_E+t_F},\frac{q(t_Et_F-1)}{t_E+t_F}\right),\\(x_B,y_B)&=\left(\frac{p(t_Ft_D+1)}{t_F+t_D},\frac{q(t_Ft_D-1)}{t_F+t_D}\right),\\(x_C,y_C)&=\left(\frac{p(t_Dt_E+1)}{t_D+t_E},\frac{q(t_Dt_E-1)}{t_D+t_E}\right),\end{aligned}$$

由此得

$$\frac{BD}{DC}=\frac{x_D-x_B}{x_C-x_D}=\frac{(t_D+t_E)(t_F-t_D)}{(t_F+t_D)(t_D-t_E)},$$

同理得

$$\frac{CE}{EA}=\frac{(t_E+t_F)(t_D-t_E)}{(t_D+t_E)(t_E-t_F)},\ \ \frac{AF}{FB}=\frac{(t_F+t_D)(t_E-t_F)}{(t_E+t_F)(t_F-t_D)},$$

所以

$$k_1:k_2:k_3=(t_D+t_E)(t_D+t_F)(t_E-t_F):(t_E+t_F)(t_E+t_D)(t_F-t_D):(t_F+t_D)(t_F+t_E)(t_D-t_E),$$

由此得

$$k_1k_2k_3(k_1+k_2+k_3)=-(t_D+t_E)^2(t_D+t_F)^2(t_E+t_F)^2(t_D-t_E)^2(t_D-t_F)^2(t_E-t_F)^2<0,$$
$$a:b:c=t_D(t_E^2-t_F^2):t_E(t_F^2-t_D^2):t_F(t_D^2-t_E^2).$$

因为

$$S_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}=\frac{pqt_D(t_E-t_F)}{(t_D+t_E)(t_D+t_F)},$$

同理得

$$S_2=\frac{pqt_E(t_F-t_D)}{(t_E+t_F)(t_E+t_D)},\ \ S_3=\frac{pqt_F(t_D-t_E)}{(t_F+t_D)(t_F+t_E)},$$

所以

$$S_1:S_2:S_3=t_D(t_E^2-t_F^2):t_E(t_F^2-t_D^2):t_F(t_D^2-t_E^2).$$

由此得

$$S_1:S_2:S_3=a:b:c.$$ □

类似定理 2 的证明，可得

定理 3. 抛物线与直线 BC、CA、AB 分别相切于点 D、E、F，$BD:DC=k_2:k_3$，$CE:EA=k_3:k_1$，$AF:FB=k_1:k_2$，$a=k_2+k_3$，则 $k_1+k_2+k_3=0$.

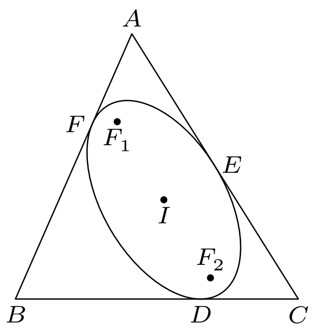

图 1

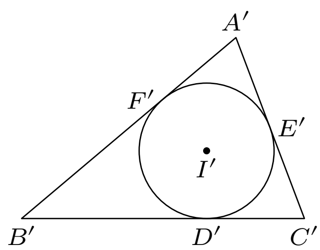

图 2

以下设 $|BC|=a$，$|CA|=b$，$|AB|=c$，$S_{\triangle ABC}=S$（非有向面积）.

如图 1，$\triangle ABC$ 的内切椭圆的中心是 I，两焦点分别是 F_1、F_2，与边 BC、CA、AB 的切点分别是 D、E、F，那么必定可以从一个三角形的内切圆通过仿射变换得到 $\triangle ABC$ 的这个内切椭圆. 设 $\triangle A'B'C'$

的内切圆 I 与边 $B'C'$、$C'A'$、$A'B'$ 的切点分别是 D'、E'、F'，$\triangle A'B'C'$ 经过仿射变换后变成 $\triangle ABC$，点 D'、E'、F' 分别变成点 D、E、F（图 2）. 根据仿射变换的性质，必定有

$$\frac{BD}{DC}=\frac{B'D'}{D'C'},\ \frac{CE}{EA}=\frac{C'E'}{E'A'},\ \frac{AF}{FB}=\frac{A'F'}{F'B'},$$

因为

$$E'A'=A'F',\ F'B'=B'D',\ D'C'=C'E',$$

所以

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{C'E'}{E'A'}\cdot\frac{A'F'}{F'B'}\cdot\frac{A'F'}{F'B'}=1,$$

由 Menelaus 定理的逆定理知直线 AD、BE、CF 共点，所以只要点 D、E、F 任意两个确定后第三个点便可确定. 因为点 I' 必定在 $\triangle D'E'F'$ 内，所以点 I 也必定在 $\triangle DEF$ 内，点 D、E、F 关于点 O 的对称点是 D''、E''、F''，则点 D、E、F、D''、E''、F'' 没有四点共线，所以过点 D、E、F、D''、E''、F'' 的椭圆是唯一的，以点 D、E、F 为切点的 $\triangle ABC$ 的内切椭圆是唯一的.

设 $|BD|=tk_2$，$|DC|=tk_3$，$|CE|=uk_3$，$|EA|=uk_1$，$|AF|=vk_1$，$|FB|=vk_2$，其中 t、u、v、k_1、k_2、k_3 都是正数，$S_{\triangle ABC}=S$，椭圆长半轴长是 p，短半轴长是 q，则必定

$$E'A':A'F':F'B':B'D':D'C':C'E'=k_1:k_1:k_2:k_2:k_3:k_3,$$

不妨设 $|B'C'|=a'=k_2+k_3$，$|C'A'|=b'=k_3+k_1$，$|A'B'|=c'=k_1+k_2$，$\triangle A'B'C'$ 的面积是 S'，内切圆圆心是 I'，则由仿射变换的性质得

$$S_{\triangle IBC}:S_{\triangle ICA}:S_{\triangle IAB}=S_{\triangle I'B'C'}:S_{\triangle I'C'A'}:S_{\triangle I'A'B'}=a':b':c',\tag{1}$$

所以

$$S_{\triangle IBC}=\frac{a'S}{a'+b'+c'},\ S_{\triangle ICA}=\frac{b'S}{a'+b'+c'},\ S_{\triangle IAB}=\frac{c'S}{a'+b'+c'},$$

因为 I 是 F_1F_2 的中点，所以

$$\begin{aligned}S_{\triangle F_1BC}+S_{\triangle F_2BC}&=\frac{2a'S}{a'+b'+c'},\\ S_{\triangle F_1CA}+S_{\triangle F_2CA}&=\frac{2b'S}{a'+b'+c'},\\ S_{\triangle F_1AB}+S_{\triangle F_2AB}&=\frac{2c'S}{a'+b'+c'}.\end{aligned}$$

设

$$\begin{aligned}S_{\triangle F_1BC}&=\frac{a'S}{a'+b'+c'}+S_A,\ S_{\triangle F_2BC}=\frac{a'S}{a'+b'+c'}-S_A,\\ S_{\triangle F_1CA}&=\frac{b'S}{a'+b'+c'}+S_B,\ S_{\triangle F_2CA}=\frac{b'S}{a'+b'+c'}-S_B,\\ S_{\triangle F_1AB}&=\frac{c'S}{a'+b'+c'}+S_C,\ S_{\triangle F_2CA}=\frac{c'S}{a'+b'+c'}-S_C,\end{aligned}$$

其中

$$S_A+S_B+S_C=0.$$

因为

$$\frac{S_{\triangle F_1BC}S_{\triangle F_2BC}}{a^2}=\frac{S_{\triangle F_1CA}S_{\triangle F_2CA}}{b^2}=\frac{S_{\triangle F_1AB}S_{\triangle F_2AB}}{c^2}=\frac{q^2}{4},$$

所以

$$\frac{\left(\frac{a'S}{a'+b'+c'}\right)^2-S_A^2}{a^2}=\frac{\left(\frac{b'S}{a'+b'+c'}\right)^2-S_B^2}{b^2}=\frac{\left(\frac{c'S}{a'+b'+c'}\right)^2-S_C^2}{c^2}=\frac{q^2}{4}.$$

即得

$$S_A^2=\left(\frac{a'S}{a'+b'+c'}\right)^2-\frac{a^2q^2}{4},\ S_B^2=\left(\frac{b'S}{a'+b'+c'}\right)^2-\frac{b^2q^2}{4},\ S_C^2=\left(\frac{c'S}{a'+b'+c'}\right)^2-\frac{c^2q^2}{4}.$$

因为

$$S_A+S_B+S_C=0,$$

所以

$$\begin{aligned}&2S_A^2S_B^2+2S_A^2S_C^2+2S_B^2S_C^2-S_A^4-S_B^4-S_C^4\\=&(S_A+S_B+S_C)(-S_A+S_B+S_C)(S_A-S_B+S_C)(S_A+S_B-S_C)\\=&0,\end{aligned}$$

把 S_A^2、S_B^2、S_C^2 的值代入上式，整理得

$$\begin{aligned}&2(a'+b'+c')^4q^4\\&-(a'+b'+c')^2(a^2(-a'^2+b'^2+c'^2)+b^2(a'^2-b'^2+c'^2)+c^2(a'^2+b'^2-c'^2))q^2\\&+32S^2S'^2\\=&0,\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}&\alpha=a^2(-a'^2+b'^2+c'^2)+b^2(a'^2-b'^2+c'^2)+c^2(a'^2+b'^2-c'^2),\\&\beta=a^4b'^2c'^2+a'^2b^4c'^2+a'^2b'^2c^4\\&\quad-a^2b^2c'^2(a'^2+b'^2-c'^2)-a^2b'^2c^2(a'^2-b'^2+c'^2)-a'^2b^2c^2(-a'^2+b'^2+c'^2),\end{aligned}$$

则

$$q^2=\frac{64S^2S'^2}{(a'+b'+c')^2(\alpha+2\sqrt{\beta})}\text{ 或 }q^2=\frac{64S^2S'^2}{(a'+b'+c')^2(\alpha-2\sqrt{\beta})}.$$

因为

$$\alpha^2-4\beta=256S^2S'^2>0,$$

经计算，得

$$\left(\frac{a'S}{a'+b'+c'}\right)^2-\frac{a^2}{4}\cdot\frac{64S^2S'^2}{(a'+b'+c')^2(\alpha-2\sqrt{\beta})}=\left(\frac{S}{a'+b'+c'}\right)^2\cdot\frac{a'^2\alpha-16a^2S'^2-2a'^2\sqrt{\beta}}{\alpha-2\sqrt{\beta}},$$

但是

$$(a'^2\alpha-16a^2S'^2)^2-4a'^4\beta=-16S'^2(a^2b'^2-a'^2b^2-a^2c'^2+a'^2c^2)^2\leqslant 0,$$

即 $S_A^2\leqslant 0$，这是不可能的，所以只能

$$q^2=\frac{64S^2S'^2}{(a'+b'+c')^2(\alpha+2\sqrt{\beta})}=\frac{\alpha-2\sqrt{\beta}}{4(a'+b'+c')^2},$$

即

$$q=\frac{\sqrt{\alpha-2\sqrt{\beta}}}{2(a'+b'+c')},$$

由此知所有满足条件的解中 $|S_A|$、$|S_B|$、$|S_C|$ 的值都是分别相等的. 若 $S_A = S_B = S_C = 0$ 则两焦点重合，此时椭圆就是 $\triangle ABC$ 的内切圆；若 S_A、S_B、S_C 有一个是 0，则另外两个互为相反数；若 S_A、S_B、S_C 都不是 0，不妨设 $S_A < 0 < S_B \leqslant S_C$，则 $-|S_A| + |S_B| + |S_C| = 0$，$S_A$、$S_B$、$S_C$ 都变为原数的相反数时仍然是解，其他情况，例如 S_A、S_B 都是负数、S_C 是正数，那么 $S_A + S_B + S_C = -|S_A| - |S_B| + |S_C| = -2|S_B| < 0$，所以只能有两组解. 由此便可确定 $S_{\triangle F_1BC}$、$S_{\triangle F_2BC}$、$S_{\triangle F_1CA}$、$S_{\triangle F_2CA}$、$S_{\triangle F_1AB}$、$S_{\triangle F_2AB}$ 的值，这两组解对应椭圆的两个焦点.

设 $\triangle A'B'C'$ 的内切圆半径是 r'，则

$$r' = \frac{2S'}{a' + b' + c'},$$

由仿射变换的性质得

$$\frac{\pi pq}{\pi r'^2} = \frac{S}{S'},$$

所以

$$p = \frac{\sqrt{\alpha + 2\sqrt{\beta}}}{2(a' + b' + c')}.$$

因为定圆外切三角形中等边三角形的面积最小，所以定三角形的内切椭圆中，中心是三角形的重心的内切椭圆面积最大，三边的中点是该椭圆的切点.

若给定三角形以及内切椭圆的中心，则由 (1) 便可确定切点，然后就可以用上面的结论了. 设 BC、CA、AB、AD、BE、DF 的中点分别是 M_A、M_B、M_C、M_1、M_2、M_3. 因为 $a' < b' + c'$，所以 $a' < \dfrac{a' + b' + c'}{2}$，同理得 $b' < \dfrac{a' + b' + c'}{2}$，$c' < \dfrac{a' + b' + c'}{2}$，所以椭圆的中心一定在以三角形三边中点为顶点的三角形内. 另外，若固定点 D 的位置，因为

$$k_2(a' + b' - c') = k_3(a' - b' + c'),$$

由此得椭圆中心的轨迹是一线段的内部，当

$$a' = 0,\ b' = c' = \frac{S}{2}$$

或

$$a' = \frac{S}{2},\ b' = \frac{k_3 S}{2(k_2 + k_3)},\ c' = \frac{k_2 S}{2(k_2 + k_3)}$$

时满足 $k_2(a' + b' - c') = k_3(a' - b' + c')$，所以椭圆中心的轨迹就线段 M_AM_1 的内部. 同理得，若固定点 E 的位置，则椭圆中心的轨迹是线段 M_BM_2 的内部；若固定点 F 的位置，则椭圆中心的轨迹是线段 M_CM_3 的内部. 因为点 M_1、M_2、M_3 分别在直线 M_BM_C、M_CM_A、M_AM_B 上，所以作连点 A 和直线 IM_A 与 M_BM_C 的交点的直线，这条直线与直线 BC 的交点就是点 D，其余两个切点类似可确定. 从上面的计算可知，若给定一切点，上述结论把线段内部改为直线，那么这条直线就是内切或旁切二次曲线的轨迹. 于是有

定理 4. 点 D 是 $\triangle ABC$ 的内切或旁切二次曲线 c 的切点，BC 的中点是 M_A，AD 的中点是 M_1，则二次曲线 c 的中心的轨迹是直线 M_AM_1.

若给定三角形以及内切椭圆的一个焦点，则另一焦点是这个交点关于这个三角形的等角共轭点，其中心就是两焦点的中点，由 (1) 便可确定切点，然后就可以用上面的结论了.

对于 $\triangle ABC$ 与点 A 在直线 BC 两侧的旁切椭圆，也可利用上述方法求出旁切椭圆的中心、焦点、长半轴、短半轴. 设旁切椭圆的旁心是 I，两焦点分别是 F_1、F_2，与边 BC、CA、AB 的切点分别是 D、

E、F，$|BD|=tk_2$，$|DC|=tk_3$，$|CE|=uk_3$，$|EA|=uk_1$，$|AF|=vk_1$，$|FB|=vk_2$，其中 t、u、v、k_1、k_2、k_3 都是正数，椭圆长半轴长是 p，短半轴长是 q，$|B'C'|=a'=k_2+k_3$，$|C'A'|=b'=k_1-k_3$，$|A'B'|=c'=k_1-k_2$，$\triangle A'B'C'$ 的面积是 S'，

$$\begin{aligned}&\alpha=a^2(-a'^2+b'^2+c'^2)+b^2(a'^2-b'^2+c'^2)+c^2(a'^2+b'^2-c'^2),\\&\beta=a^4b'^2c'^2+a'^2b^4c'^2+a'^2b'^2c^4\\&\quad-a^2b^2c'^2(a'^2+b'^2-c'^2)-a^2b'^2c^2(a'^2-b'^2+c'^2)-a'^2b^2c^2(-a'^2+b'^2+c'^2),\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}&p=\frac{\sqrt{\alpha+2\sqrt{\beta}}}{2(-a'+b'+c')},\\&q=\frac{\sqrt{\alpha-2\sqrt{\beta}}}{2(-a'+b'+c')},\\&S_{\triangle IBC}:S_{\triangle ICA}:S_{\triangle IAB}=a':b':c',\\&\frac{S_{\triangle F_1BC}S_{\triangle F_2BC}}{a^2}=\frac{S_{\triangle F_1CA}S_{\triangle F_2CA}}{b^2}=\frac{S_{\triangle F_1AB}S_{\triangle F_2AB}}{c^2}=\frac{q^2}{4}.\end{aligned}$$

其他位置的旁切椭圆类似可确定．椭圆的中心在切点所围成的三角形外部，点 I 与点 D 在直线 BC 异侧，点 I 与点 E 在直线 CA 同侧，点 I 与点 F 在直线 AB 同侧．给定三角形以及切点或给定三角形以及椭圆中心或给定三角形以及一焦点旁切椭圆都是唯一确定的．切点与切点所在直线的边所对的三角形顶点连线共点．若给定旁切椭圆一焦点，则另一焦点是该焦点关于该三角形的等角共轭点．设 BC、CA、AB、AD、BE、DF 的中点分别是 M_A、M_B、M_C、M_1、M_2、M_3．椭圆中心在两射线 M_AM_B、M_AM_C 的反向延长线所成的劣角范围内．若固定点 D 的位置，则椭圆中心的轨迹就线段 M_AM_1 的反向延长线内部；若固定点 E 的位置，则椭圆中心的轨迹是线段 M_2M_B 的反向延长线内部；若固定点 F 的位置，则椭圆中心的轨迹是线段 M_3M_C 的反向延长线内部．作连点 A 和直线 IM_A 与 M_BM_C 的交点的直线，这条直线与直线 BC 的交点就是点 D，其余两个切点类似可确定．设过点 M_B 平行于直线 ID 的直线是 l_B，过点 M_C 平行于直线 ID 的直线是 l_C，直线 l'_B 平行于直线 l_B，且点 B 到 l'_B 的距离是点 B 到 l_B 的距离的两倍，直线 l'_C 平行于直线 l_C，且点 C 到 l'_C 的距离是点 C 到 l_C 的距离的两倍，直线 l'_B 交直线 CA 于点 P，直线 l'_C 交直线 AB 于点 Q，则点 E 一定在线段 CP 内部，点 F 一定在线段 BQ 内部．

设 S 是 $\triangle ABC$ 的面积（非有向面积），以下设线段都是有向线段，面积都是有向面积，直线 BC、CA、AB 是圆锥曲线 Γ 的切线，切点分别是 D、E、F，$BD:DC=k_2:k_3$，$CE:EA=k_3:k_1$，$AF:FB=k_1:k_2$，那么 $k_1:k_2$、$k_2:k_3$、$k_3:k_1$ 必定全是正的或一正二负．再设 $a=t(k_2+k_3)$，$b=u(k_3+k_1)$，$c=v(k_1+k_2)$，$a'=k_2+k_3$，$b'=k_3+k_1$，$c'=k_1+k_2$，则

$$16S^2=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

令

$$\begin{aligned}&\alpha=a^2(-a'^2+b'^2+c'^2)+b^2(a'^2-b'^2+c'^2)+c^2(a'^2+b'^2-c'^2),\\&\beta=a^4b'^2c'^2+a'^2b^4c'^2+a'^2b'^2c^4\\&\quad-a^2b^2c'^2(a'^2+b'^2-c'^2)-a^2b'^2c^2(a'^2-b'^2+c'^2)-a'^2b^2c^2(-a'^2+b'^2+c'^2),\end{aligned}$$

则当 $k_1k_2k_3(k_1+k_2+k_3)>0$ 时，$|a'|$、$|b'|$、$|c'|$ 能构成三角形的三边长，设 $|a'|$、$|b'|$、$|c'|$ 构成 $\triangle A'B'C'$，若 $\triangle A'B'C'$ 不是钝角三角形，则必定 $\alpha>0$，若 $\triangle A'B'C'$ 是钝角三角形，不妨设 $\angle A'$ 是钝角，则

$$\alpha>(b+c)^2(-a'^2+b'^2+c'^2)+b^2(a'^2-b'^2+c'^2)+c^2(a'^2+b'^2-c'^2)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2b^2c'^2 + 2b'^2c^2 + 2bc(-a'^2 + b'^2 + c'^2) \\
&> 2b^2c'^2 + 2b'^2c^2 + 2bc(-(|b'| + |c'|)^2 + b'^2 + c'^2) \\
&= 2(b|c'| - |b'|c)^2 \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

所以当 $k_1k_2k_3(k_1+k_2+k_3) > 0$ 时必定 $\alpha > 0$；另外

$$\beta = \left(a'^2bc - \frac{a^2(b^2c'^2 + b'^2c^2) - b^4c'^2 - b'^2c^4 + b^2c^2(b'^2 + c'^2)}{2bc}\right)^2 + \frac{4S^2(b^2c'^2 - b'^2c^2)^2}{b^2c^2} \geqslant 0,$$

所以要 $\beta = 0$，必须

$$a'^2b^2c^2 = a^2(b^2c'^2 + b'^2c^2) - b^4c'^2 - b'^2c^4 + b^2c^2(b'^2 + c'^2),\quad b^2c'^2 - b'^2c^2 = 0,$$

由此可得

$$|a'| : |b'| : |c'| = a : b : c,$$

若 a'、b'、c' 同号，此时对应 $\triangle ABC$ 的内切圆的情形；若 a'、b'、c' 不全同号，此时对应 $\triangle ABC$ 的旁切圆的情形.

对于双曲线，可将坐标系中的 y 坐标变为 $\mathrm{i}y$，此时三角形变为虚直线三角形，椭圆变为双曲线，圆变为等轴双曲线，椭圆上的虚点 $(x, \mathrm{i}y)$ 变为双曲线的实点 (x, y)，而变换后的同一直线上的对应有向线段长度比不变，对应图形的有向面积比不变，再应用椭圆的结论即可得到双曲线的结论.

对于抛物线 $y^2 = 2px$，设其焦点是 F_Γ，顶点是 O，利用其参数方程 $\begin{cases} x = 2pt_\Gamma^2, \\ y = 2pt_\Gamma, \end{cases}$ 点 D、E、F 对应的参数分别是 t_D、t_E、t_F，由切线方程可得点 A、B、C 的坐标分别是 $(2pt_Et_F, p(t_E+t_F))$、$(2pt_Ft_D, p(t_F+t_D))$、$(2pt_Dt_E, p(t_D+t_E))$，由此可得

$$
\begin{aligned}
&k_1 : k_2 : k_3 = (t_E - t_F) : (t_F - t_D) : (t_D - t_E), \\
&BD^2 = p^2(1+4t_D^2)(t_D - t_F)^2,\quad DC^2 = p^2(1+4t_D^2)(t_D - t_E)^2, \\
&CE^2 = p^2(1+4t_E^2)(t_E - t_D)^2,\quad EA^2 = p^2(1+4t_E^2)(t_E - t_F)^2, \\
&AF^2 = p^2(1+4t_F^2)(t_F - t_E)^2,\quad FB^2 = p^2(1+4t_F^2)(t_F - t_D)^2, \\
&a^2 = p^2(1+4t_D^2)(t_E - t_F)^2,\quad b^2 = p^2(1+4t_E^2)(t_F - t_D)^2,\quad c^2 = p^2(1+4t_F^2)(t_D - t_E)^2, \\
&t^2 : u^2 : v^2 = (1+4t_D^2) : (1+4t_E^2) : (1+4t_F^2), \\
&16S^2 = (tk_1 + uk_2 + vk_3)(-tk_1 + uk_2 + vk_3)(tk_1 - uk_2 + vk_3)(tk_1 + uk_2 - vk_3), \\
&S_{\triangle F_\Gamma BC} = \frac{1}{4}p^2(1+4t_D^2)(t_F - t_E), \\
&S_{\triangle F_\Gamma CA} = \frac{1}{4}p^2(1+4t_E^2)(t_D - t_F), \\
&S_{\triangle F_\Gamma AB} = \frac{1}{4}p^2(1+4t_F^2)(t_E - t_D), \\
&S_{\triangle OBC} = p^2t_D^2(t_F - t_E),\quad S_{\triangle OCA} = p^2t_E^2(t_D - t_F),\quad S_{\triangle OAB} = p^2t_F^2(t_E - t_D),
\end{aligned}
$$

由此得方程组

$$\begin{cases} t_E - t_F = kk_1, \\ t_F - t_D = kk_2, \\ t_D - t_E = kk_3, \\ p^2(1+4t_D^2) = \left(\dfrac{t}{k}\right)^2, \\ p^2(1+4t_E^2) = \left(\dfrac{u}{k}\right)^2, \\ p^2(1+4t_F^2) = \left(\dfrac{v}{k}\right)^2, \end{cases}$$

其中 $k \neq 0$，解这个方程组就可得 p、t_D、t_E、t_F、k 的值，接着就可得到 $S_{\triangle F_\Gamma BC}$、$S_{\triangle F_\Gamma CA}$、$S_{\triangle F_\Gamma AB}$、$S_{\triangle OBC}$、$S_{\triangle OCA}$、$S_{\triangle OAB}$ 的值．具体的过程不写了，具体的计算结果如下：

$$p = \frac{8S^2}{|t^2k_1+u^2k_2+v^2k_3|\sqrt{-k_1k_2k_3(t^2k_1+u^2k_2+v^2k_3)}},$$

$$S_{\triangle F_\Gamma BC} = \frac{t^2k_1}{t^2k_1+u^2k_2+v^2k_3}S,\ S_{\triangle F_\Gamma CA} = \frac{u^2k_2}{t^2k_1+u^2k_2+v^2k_3}S,\ S_{\triangle F_\Gamma AB} = \frac{v^2k_3}{t^2k_1+u^2k_2+v^2k_3}S,$$

$$S_{\triangle OBC} = -\frac{((t^2-u^2)k_2^2-(t^2-v^2)k_3^2)^2}{4k_2k_3(t^2k_1+u^2k_2+v^2k_3)^2}S,$$

$$S_{\triangle OCA} = -\frac{((u^2-v^2)k_3^2-(u^2-t^2)k_1^2)^2}{4k_3k_1(t^2k_1+u^2k_2+v^2k_3)^2}S,$$

$$S_{\triangle OAB} = -\frac{((v^2-t^2)k_1^2-(v^2-u^2)k_2^2)^2}{4k_1k_2(t^2k_1+u^2k_2+v^2k_3)^2}S,$$

此时

$$t^2k_1+u^2k_2+v^2k_3 = -4kp^2(t_D-t_E)(t_E-t_F)(t_F-t_D) \neq 0,$$

$$-k_1k_2k_3(t^2k_1+u^2k_2+v^2k_3) = \frac{4p^2(t_D-t_E)^2(t_E-t_F)^2(t_F-t_D)^2}{k^2} > 0,$$

综合上述讨论，可得

定理 5. 椭圆 Γ 的两焦点分别是 F_1、F_2，中心是 I，长半轴长是 p，短半轴长是 q，离心率是 e，则

$$p = \frac{\sqrt{\alpha+2\sqrt{\beta}}}{2|a'+b'+c'|},\ q = \frac{\sqrt{\alpha-2\sqrt{\beta}}}{2|a'+b'+c'|},\ e = 2\sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha+2\sqrt{\beta}}},$$

$$S_{\triangle IBC} : S_{\triangle ICA} : S_{\triangle IAB} = a' : b' : c',$$

$$S_{\triangle F_1BC} = \frac{a'S}{a'+b'+c'} + S_A,\ S_{\triangle F_2BC} = \frac{a'S}{a'+b'+c'} - S_A,$$

$$S_{\triangle F_1CA} = \frac{b'S}{a'+b'+c'} + S_B,\ S_{\triangle F_2CA} = \frac{b'S}{a'+b'+c'} - S_B,$$

$$S_{\triangle F_1AB} = \frac{c'S}{a'+b'+c'} + S_C,\ S_{\triangle F_2CA} = \frac{c'S}{a'+b'+c'} - S_C,$$

$$S_A^2 = \left(\frac{a'S}{a'+b'+c'}\right)^2 - \frac{a^2q^2}{4},\ S_B^2 = \left(\frac{b'S}{a'+b'+c'}\right)^2 - \frac{b^2q^2}{4},\ S_C^2 = \left(\frac{c'S}{a'+b'+c'}\right)^2 - \frac{c^2q^2}{4},$$

$$S_A + S_B + S_C = 0.$$

定理 6. 双曲线 Γ 的两焦点分别是 F_1、F_2，中心是 I，实半轴长是 p，虚半轴长是 q，离心率是 e，则

$$p = \frac{\sqrt{\alpha+2\sqrt{\beta}}}{2|a'+b'+c'|},\ q = \frac{\sqrt{-\alpha+2\sqrt{\beta}}}{2|a'+b'+c'|},\ e = 2\sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha+2\sqrt{\beta}}},$$

$$
\begin{aligned}
&S_{\triangle IBC}:S_{\triangle ICA}:S_{\triangle IAB}=a':b':c',\\
&S_{\triangle F_1BC}=\frac{a'S}{a'+b'+c'}+S_A,\ S_{\triangle F_2BC}=\frac{a'S}{a'+b'+c'}-S_A,\\
&S_{\triangle F_1CA}=\frac{b'S}{a'+b'+c'}+S_B,\ S_{\triangle F_2CA}=\frac{b'S}{a'+b'+c'}-S_B,\\
&S_{\triangle F_1AB}=\frac{c'S}{a'+b'+c'}+S_C,\ S_{\triangle F_2CA}=\frac{c'S}{a'+b'+c'}-S_C,\\
&S_A^2=\left(\frac{a'S}{a'+b'+c'}\right)^2+\frac{a^2q^2}{4},\ S_B^2=\left(\frac{b'S}{a'+b'+c'}\right)^2+\frac{b^2q^2}{4},\ S_C^2=\left(\frac{c'S}{a'+b'+c'}\right)^2+\frac{c^2q^2}{4},\\
&S_A+S_B+S_C=0.
\end{aligned}
$$

定理 7. 抛物线 $\mathit{\Gamma}$ 的焦点是 $F_{\mathit{\Gamma}}$，顶点是 O，焦点到准线距离是 p，则

$$
\begin{aligned}
&p=\frac{8S^2}{|t^2k_1+u^2k_2+v^2k_3|\sqrt{-k_1k_2k_3(t^2k_1+u^2k_2+v^2k_3)}},\\
&S_{\triangle F_{\mathit{\Gamma}}BC}=\frac{t^2k_1}{t^2k_1+u^2k_2+v^2k_3}S,\ S_{\triangle F_{\mathit{\Gamma}}CA}=\frac{u^2k_2}{t^2k_1+u^2k_2+v^2k_3}S,\ S_{\triangle F_{\mathit{\Gamma}}AB}=\frac{v^2k_3}{t^2k_1+u^2k_2+v^2k_3}S,\\
&S_{\triangle OBC}=-\frac{((t^2-u^2)k_2^2-(t^2-v^2)k_3^2)^2}{4k_2k_3(t^2k_1+u^2k_2+v^2k_3)^2}S,\\
&S_{\triangle OCA}=-\frac{((u^2-v^2)k_3^2-(u^2-t^2)k_1^2)^2}{4k_3k_1(t^2k_1+u^2k_2+v^2k_3)^2}S,\\
&S_{\triangle OAB}=-\frac{((v^2-t^2)k_1^2-(v^2-u^2)k_2^2)^2}{4k_1k_2(t^2k_1+u^2k_2+v^2k_3)^2}S.
\end{aligned}
$$

四边形的相切圆锥曲线

先求四边形四边形内切或旁切二次曲线中心的轨迹．设点 P 是四边形 $ABCD$ 内切或旁切二次曲线 c 边 AB 的切点．设 AB 的中点是 M_1，若直线 AD、BC 相交于点 E，PE 的中点是 M_2，由定理 3 知 c 的中心在直线 M_1M_2 上；若 AD、BC 平行，则 c 的中心在过点 M_1 且与 AD 平行的直线上．考虑直线 AB、CD，利用上面的结论，c 的中心在另一条直线上．

若四边形 $ABCD$ 是平行四边形，由上面的讨论知中心一定是对边中点所连直线的交点，即对角线的交点．若四边形是梯形，由上面的讨论知中心一定在两腰中点所连的直线上，而对角线的中点必定在此直线上，所以中心的轨迹就是对角线中点所连的直线．下面来确定没有两边平行的四边形中心的轨迹，下面设四边形 $ABCD$ 没有两边平行，由上面的讨论，当点 P 与点 B 重合时，中心一定是 BD 的中点，即 BD 的中点一定在轨迹上；同理，AC 的中点一定在轨迹上．设直线 AB、CD 交于点 F，点 A 的坐标是 $(0,0)$，点 B 的坐标是 $(x_1,0)$，点 F 的坐标是 $(x_2,0)$，点 D 的坐标是 (x_3,kx_3)，点 E 的坐标是 (x_4,kx_4)，点 P 的坐标是 $(x_0,0)$，则 c 的中心满足方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{x-\dfrac{x_2}{2}}{\dfrac{x_0+x_3}{2}-\dfrac{x_2}{2}}=\dfrac{y}{\dfrac{kx_3}{2}},\\[2ex]
\dfrac{x-\dfrac{x_1}{2}}{\dfrac{x_0+x_4}{2}-\dfrac{x_1}{2}}=\dfrac{y}{\dfrac{kx_4}{2}},
\end{cases}
$$

从上面的方程组得

$$
x_0=\frac{2kx_3x+2(x_2-x_3)y-kx_2x_3}{2y}=\frac{2kx_4x+2(x_1-x_4)y-kx_1x_4}{2y},
$$

整理得

$$2k(x_3-x_4)x-2(x_1-x_2+x_3-x_4)y+k(x_1x_4-x_2x_3)=0,$$

这是一条过 AC、BD 中点的直线．由此得

定理 8. 平行四边形的内切或旁切二次曲线中心的轨迹是对角线的交点，非平行四边形的内切或旁切二次曲线中心的轨迹是过对角线中点的直线．

定理 9. 四边形 $ABCD$ 的内切或旁切二次曲线的中心是 I，以下的面积都是有向面积则 $S_{\triangle IAB}+S_{\triangle ICD}=S_{\triangle IDA}+S_{\triangle IBC}$．

下面讨论四边形的内切椭圆．

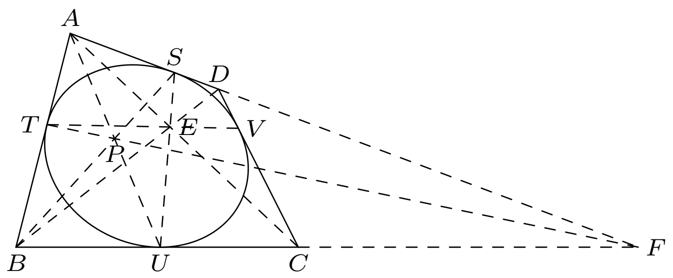

图 3

如图 3，若给定四边形 $ABCD$ 和边 DA 的切点 S．由 Brianchon 定理，直线 AC、BD、对边切点的连线共点，设 AC、BD 交于点 E，作直线 SE 与 BC 的交点 U，点 U 就是边 BC 的切点．设直线 AU、BS 交于点 P．若直线 AD、BC 交于点 F，则作直线 FP；若直线 $AD\parallel BC$，则过点 P 作直线 AD 的平行线，所作的直线交直线 AB 于点 T，点 T 就是边 AB 的切点．作直线 TE、CD 的交点 V，点 V 就是边 CD 的切点．

若给定四边形内切椭圆的一个焦点，则另一焦点就是该焦点关于该四边形的等角共轭点，两焦点的中点就是椭圆的中心．若四边形 $ABCD$ 不是平行四边形，则给定一切点的四边形 $ABCD$ 的内切椭圆可用三角形的内切椭圆解决，并且可知内切椭圆是唯一的．因为四边形 $ABCD$ 内切椭圆中心的轨迹是 AC、BD 中点所形成线段的内部，由三角形内切三角形的结论就可以确定所有切点的位置了．

下面设四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

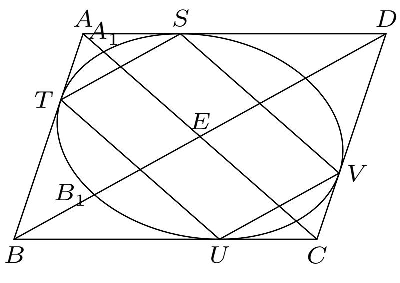

图 4

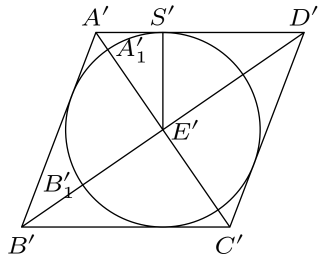

图 5

如图 4，若给定 $\square ABCD$ 和边 DA 的切点 S，设内切椭圆边 AB、BC、CD 的切点分别是 T、U、V，则点 T、U、V 的位置可用上面的方法确定．设 AC、BD 交于点 E，因为 SU、TV 也交于点 E，所以点 E 同时平分 SU、TV，即四边形 $STUV$ 也是平行四边形．因为点 A 与 ST 中点的连线与因为点 C 与 UVT 中点的连线过椭圆的中心，所以点 A 与 ST 中点的连线与因为点 C 与 UVT 中点的连线必定与 AC 重合，由此知 $ST\parallel UV\parallel BC$，同理得 $TU\parallel SV\parallel AC$．所以点 E 就是内切椭圆的中心，且直线 AC、BD 就是

共轭直径所在直线，由此知平行四边形内切椭圆的中心就是四边形对角线的交点，两对角线就是内切椭圆的一对共轭直径所在的直线.

以下设圆锥曲线切四边形 $ABCD$ 的边 DA、AB、BC、CD 所在直线于点 S、T、U、V，$|AB|=a$，$|BC|=b$，$|CD|=c$，$|DA|=d$，$AS:SD=w_1:w_2$，$w_1+w_2=1$，$AT:TB=x_1:x_2$，$x_1+x_2=1$，$CU:UB=y_1:y_2$，$y_1+y_2=1$，$CV:VD=z_1:z_2$，$z_1+z_2=1$.

设线段 AE 交内切椭圆于点 A_1，线段 BE 交内切椭圆于点 B_1. 如图 5，设这个内切椭圆是由菱形 $A'B'C'D'$ 的内切圆通过仿射变换得到的，点 A'、B'、C'、D' 经过变换后分别得点 A、B、C、D，内切圆切 $D'A'$ 于点 S'，$A'C'$、$B'D'$ 交于点 E'，线段 $A'E'$ 交内切椭圆于点 A_1'，线段 $B'E'$ 交内切椭圆于点 B_1'. 设 $|AC|=2e$，$|BD|=2f$，直线 AC、BD 的夹角是 θ，$|A'S'|=w_2$，$|S'D'|=w_2$，椭圆长半轴长是 p，短半轴长是 q，则

$$|E'A_1'|=|E'S'|=\sqrt{w_1w_2},\ |E'A'|=\sqrt{w_1(w_1+w_2)}=\sqrt{w_1},$$

由仿射变换的性质得

$$\frac{|EA_1|}{|EA|}=\frac{|E'A_1'|}{|E'A'|}=\sqrt{w_2},$$

所以

$$|EA_1|=e\sqrt{w_2},$$

同理得

$$|EB_1|=f\sqrt{w_1},$$

由椭圆的基本平行四边形的结论可得

$$p=\sqrt{\frac{e^2w_2+f^2w_1+\sqrt{e^4w_2^2+f^4w_1^2+2e^2f^2w_1w_2\cos 2\theta}}{2}},$$
$$q=\sqrt{\frac{e^2w_2+f^2w_1-\sqrt{e^4w_2^2+f^4w_1^2+2e^2f^2w_1w_2\cos 2\theta}}{2}}.$$

此时椭圆面积是

$$\pi pq=\pi pq\sin\theta\sqrt{2w_1w_2}\leqslant\pi pq\sin\theta\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{w_1+w_2}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi pq\sin\theta,$$

当且仅当 $w_1=w_2$ 时取得等号. 离心率是

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{p^2-q^2}}{p}&=\sqrt{\frac{2\sqrt{e^4w_2^2+f^4w_1^2+2e^2f^2w_1w_2\cos 2\theta}}{e^2w_2+f^2w_1+\sqrt{e^4w_2^2+f^4w_1^2+2e^2f^2w_1w_2\cos 2\theta}}}\\&=\sqrt{\frac{2}{\dfrac{e^2w_2+f^2w_1}{\sqrt{e^4w_2^2+f^4w_1^2+2e^2f^2w_1w_2\cos 2\theta}}+1}},\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\frac{(e^2w_2+f^2w_1)^2}{e^4w_2^2+f^4w_1^2+2e^2f^2w_1w_2\cos 2\theta}&=1+\frac{4e^2f^2w_1w_2\sin^2\theta}{e^4w_2^2+f^4w_1^2+2e^2f^2w_1w_2\cos 2\theta}=1+\frac{4\sin^2\theta}{\dfrac{e^4w_2^2+f^4w_1^2}{e^2f^2w_1w_2}+2\cos 2\theta}\\&\leqslant 1+\frac{4\sin^2\theta}{2+2\cos 2\theta}=\sec^2\theta,\end{aligned}$$

当且仅当 $w_1 : w_2 = e^2 : f^2$ 时取得等号，所以

$$\frac{\sqrt{p^2-q^2}}{p} \geqslant \sqrt{\frac{2}{\sec\theta+1}} = \sqrt{1-\tan^2\frac{\theta}{2}},$$

即当且仅当 $w_1 : w_2 = e^2 : f^2$ 时离心率取得最小值

$$\sqrt{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}.$$

若 $\theta = 90^\circ$，则长轴、短轴必定与 AC、BD 重合. 若 $\theta < 90^\circ$，以长轴为 x 轴，短轴为 y 轴，E 为原点建立坐标系，设直线 AC 的斜率是 k_1，直线 BD 的斜率是 k_2，则

$$\begin{cases} k_1k_2 = -\dfrac{b^2}{a^2}, \\ \dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} = \tan\theta, \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} k_1 = -\dfrac{\sqrt{e^4w_2^2+f^4w_1^2+2e^2f^2w_1w_2\cos2\theta}-e^2w_2-f^2w_1\cos2\theta}{f^2w_1\sin2\theta}, \\ k_2 = \dfrac{\sqrt{e^4w_2^2+f^4w_1^2+2e^2f^2w_1w_2\cos2\theta}-e^2w_2\cos2\theta-f^2w_1}{e^2w_2\sin2\theta}, \end{cases}$$

若 AC、BD 不互相垂直，则长轴一定位于 AC、BD 所夹锐角的那部分之内，设与 AC、BD 的夹角正切值分别是 θ_1、θ_2，则

$$\tan\theta_1 = \frac{\sqrt{e^4w_2^2+f^4w_1^2+2e^2f^2w_1w_2\cos2\theta}-e^2w_2-f^2w_1\cos2\theta}{f^2w_1\sin2\theta},$$
$$\tan\theta_2 = \frac{\sqrt{e^4w_2^2+f^4w_1^2+2e^2f^2w_1w_2\cos2\theta}-e^2w_2\cos2\theta-f^2w_1}{e^2w_2\sin2\theta}.$$

与 AC、BD 的夹角都需要满足上面式子的直线才是长轴.

设 $|AC| = 2e$，$|BD| = 2f$，直线 AC、BD 的夹角是 θ，双曲线与该平行四边形各边所在直线都相切，AD 的切点是 S，实轴一定穿过切点含切点的边所在直线包围的所含内角为劣角且区域内不包含其他边的直线的区域，曲线的实半轴长是 p，虚半轴长是 q，实轴与 AC、BD 的夹角正切值分别是 θ_1、θ_2，再利用与三角形三边所相切的方法可求得

$$p = \sqrt{\frac{e^2w_2+f^2w_1+\sqrt{e^4w_2^2+f^4w_1^2+2e^2f^2w_1w_2\cos2\theta}}{2}},$$
$$q = \sqrt{\frac{-e^2w_2-f^2w_1+\sqrt{e^4w_2^2+f^4w_1^2+2e^2f^2w_1w_2\cos2\theta}}{2}},$$
$$\tan\theta_1 = \frac{\sqrt{e^4w_2^2+f^4w_1^2+2e^2f^2w_1w_2\cos2\theta}-e^2w_2-f^2w_1\cos2\theta}{|f^2w_1\sin2\theta|},$$
$$\tan\theta_2 = \frac{\sqrt{e^4w_2^2+f^4w_1^2+2e^2f^2w_1w_2\cos2\theta}-e^2w_2\cos2\theta-f^2w_1}{|e^2w_2\sin2\theta|}.$$

与 AC、BD 的夹角都需要满足上面式子的直线才是实轴. 若 $w_1 > 0$，则 AC 与双曲线无交点，中心到 BD 与双曲线的焦点距离是 $f\sqrt{w_1}$；若 $w_2 > 0$，则中心到 AC 与双曲线的焦点距离是 $e\sqrt{w_2}$，BD 与双曲线无交点.

若给定两平行线以及与这两条平行线相交直线以及平行线上的两切点，则连结平行线的两切点得一线段，这条线段的中点就是过三个切点并且与这三条直线相切的圆锥曲线的中心，与平行线相交的那条直

线绕中心旋转 180° 就形成一个平行四边形，因此问题就变为平行四边形相切圆锥曲线的问题，用上面的结论就可以求得相切的圆锥曲线.

令

$$
\begin{aligned}
\alpha(p_1,q_1,r_1,p_2,q_2,r_2) &= p_1^2(-p_2^2+q_2^2+r_2^2)+q_1^2(p_2^2-q_2^2+r_2^2)+r_1^2(p_2^2+q_2^2-r_2^2),\\
\beta(p_1,q_1,r_1,p_2,q_2,r_2) &= p_1^4q_2^2r_2^2+p_2^2q_1^4r_2^2+p_2^2q_2^2r_1^4\\
&\quad -p_1^2q_1^2r_2^2(p_2^2+q_2^2-r_2^2)-p_1^2q_2^2r_1^2(p_2^2-q_2^2+r_2^2)-p_2^2q_1^2r_1^2(-p_2^2+q_2^2+r_2^2).
\end{aligned}
$$

若给定不是平行四边形的凸四边形，则其旁切椭圆面积可以无限小，也可以无限大，只有内切椭圆存在面积最大的椭圆. 以下讨论非平行四边形面积最大的内切椭圆问题，设内切椭圆的长半轴长是 p，短半轴长是 q.

若凸四边形 $ABCD$ 中 $AB\parallel CD$, 直线 AD、BC 交于点 F, $\triangle CDF$ 不包含四边形 $ABCD$, $|CF|=b_1$, $|DF|=d_1$，则

$$\frac{b_1}{b+b_1}=\frac{d_1}{d+d_1}=\frac{c}{a},$$

解这个方程组得

$$b_1=\frac{bc}{a-c},\ d_1=\frac{cd}{a-c},$$

那么

$$|FA|=|DA|+|DF|=\frac{ad}{a-c},\ |FB|=|BC|+|CF|=\frac{ab}{a-c},$$

设直线 AV、DT 交于点 P_1，直线 BV、CT 交于点 P_2，则 $AB\parallel CD\parallel SP_1\parallel UP_2$，则

$$\frac{AT}{DV}=\frac{AT}{SP_1}\cdot\frac{SP_1}{DV}=\frac{DA}{SD}\cdot\frac{AS}{DA}=\frac{AS}{SD},$$

即

$$\frac{x_1a}{(1-z_1)c}=\frac{w_1}{w_2},$$

同理可得

$$\frac{(1-x_1)a}{z_1c}=\frac{1-y_1}{y_1},$$

由上面两式子以及 $\triangle FAB$、$\triangle FCD$ 各自由顶点到切点连线的 Ceva 定理可列得

$$
\begin{cases}
\dfrac{x_1a}{(1-z_1)c}=\dfrac{w_1}{w_2},\\
\dfrac{(1-x_1)a}{z_1c}=\dfrac{1-y_1}{y_1},\\
\dfrac{d_1+w_2d}{w_1d}\cdot\dfrac{x_1a}{(1-x_1)a}\cdot\dfrac{(1-y_1)b}{y_1b+b_1}=1,\\
\dfrac{b_1+y_1b}{-y_1b}\cdot\dfrac{z_1c}{(1-z_1)c}\cdot\dfrac{-w_2d}{w_2d+d_1}=1,
\end{cases}
$$

把 b_1、d_1 代入这个方程组中，w_2 换成 $1-w_1$，解这个方程组可得

$$
\begin{cases}
x_1=z_1=\dfrac{w_1c}{w_2a+w_1c},\\
y_1=\dfrac{w_1c^2}{w_2a^2+w_1c^2},
\end{cases}
$$

所以

$$\begin{cases} x_1 = z_1 = \dfrac{w_1 c}{w_2 a + w_1 c}, \\ x_2 = z_2 = \dfrac{w_2 a}{w_2 a + w_1 c}, \\ y_1 = \dfrac{w_1 c^2}{w_2 a^2 + w_1 c^2}, \\ y_2 = \dfrac{w_2 a^2}{w_2 a^2 + w_1 c^2}, \end{cases}$$

由此可知当 $0 < w_1 < 1$ 时所有切点都是边的内分点，当 $w_1 < 0$ 或 $w_1 > 1$ 时所有切点都是边的外分点，并且

$$FS : SA = c(w_2 a + w_1 c) : w_1 c(a - c),$$
$$AT : TB = w_1 c(a - c) : w_2 a(a - c),$$
$$BU : UF = w_2 a(a - c) : c(w_2 a + w_1 c),$$

可令 $k_1 = c(w_2 a + w_1 c)$，$k_2 = w_1 c(a - c)$，$k_3 = w_2 a(a - c)$，那么

$$a' = k_2 + k_3 = (a - c)(w_2 a + w_1 c),\ b' = k_3 + k_1 = w_2 a^2 + w_1 c^2,\ c' = k_1 + k_2 = ac,$$

由 $\triangle FAB$ 的内切椭圆结论可得

$$\begin{aligned}(pq)^2 &= \frac{\alpha(|AB|, |FB|, |FA|, a', b', c')^2 - 4\beta(|AB|, |FB|, |FA|, a', b', c')}{16(a' + b' + c')^4} \\ &= \frac{w_1 w_2 a^2 c^2 (-a + b + c + d)(a + b - c + d)(a + b - c - d)(a - b - c + d)}{16(a - c)^2 (w_2 a + w_1 c)^2},\end{aligned}$$

把 DA 平移到点 D 与点 C 重合，由此时形成的三角形边长关系可以得 $|b - d| < a - c$，所以 $(a + b - c - d)(a - b - c + d) > 0$，又因为

$$\frac{(w_2 a + w_1 c)^2}{w_1 w_2} = \frac{a^2}{w_1} + \frac{c^2}{w_2} - (a - c)^2 = (w_1 + w_2)\left(\frac{a^2}{w_1} + \frac{c^2}{w_2}\right) - (a - c)^2 \geqslant (a + c)^2 - (a - c)^2 = 4ac,$$

当且仅当 $w_1 : w_2 = a : c$ 时取得等号，由此可得 $x_1 = x_2 = z_1 = z_2 = \dfrac{1}{2}$，$y_1 : y_2 = a : c$，此时

$$pq \leqslant \frac{\sqrt{ac(-a + b + c + d)(a + b - c + d)(a + b - c - d)(a - b - c + d)}}{8|a - c|},$$

所以面积最大的内切椭圆是以平行边中点、过对角线交点作平行边的平行线与另外两边的交点这四点为切点的内切椭圆面积最大，此时面积是

$$\frac{\pi\sqrt{ac(-a + b + c + d)(a + b - c + d)(a + b - c - d)(a - b - c + d)}}{8|a - c|}.$$

再由 $\triangle FAB$ 的内切椭圆结论可得相切圆锥曲线的离心率范围，离心率最大最小值一般要解 w_1 的一元三次方程，结论较为复杂.

因为以抛物线任意两点为切点的切线一定不平行，所以平行四边形、梯形的相切圆锥曲线中不会存在抛物线.

若凸四边形 $ABCD$ 没有任何两边平行，不妨设直线 AB、CD 交于点 E，直线 AD、BC 交于点 F，$\triangle ADE$ 和 $\triangle CDF$ 不包含四边形 $ABCD$，$|AE| = a_1$，$|CF| = b_1$，$|DE| = c_1$，$|DF| = d_1$，那么 $|EB| = |AB| + |AE| = a + a_1$，$|EC| = |CD| + |DE| = c + c_1$，由余弦定理可得

$$d^2 = a_1^2 + c_1^2 - 2a_1 c_1 \cdot \frac{(a + a_1)^2 + (c + c_1)^2 - b^2}{2(a + a_1)(c + c_1)} = \frac{a_1 c_1 b^2 - (ac_1 - a_1 c)(a_1(a + a_1) - c_1(c + c_1))}{(a + a_1)(c + c_1)},$$

由直线 AD 截 $\triangle EBC$ 和直线 BC 截 $\triangle EAD$ 的 Menelaus 定理可列得

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{a} \cdot \dfrac{b+b_1}{b} \cdot \dfrac{c}{c_1} = 1, \\ \dfrac{a+a_1}{a} \cdot \dfrac{d+d_1}{d} \cdot \dfrac{c}{c+c_1} = 1, \end{cases}$$

解这个方程组得

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{a_1bc}{ac_1 - a_1c}, \\ d_1 = \dfrac{(a+a_1)cd}{ac_1 - a_1c}, \end{cases}$$

由 $\triangle EBC$、$\triangle EAD$、$\triangle FAB$、$\triangle FCD$ 各自由顶点到切点连线的 Ceva 定理可列得

$$\begin{cases} \dfrac{a_1+x_1a}{(1-x_1)a} \cdot \dfrac{(1-y_1)b}{y_1b} \cdot \dfrac{z_1c}{(1-z_1)c+c_1} = 1, \\ \dfrac{a_1+x_1a}{-x_1a} \cdot \dfrac{w_1d}{w_2d} \cdot \dfrac{-(1-z_1)c}{(1-z_1)c+c_1} = 1, \\ \dfrac{d_1+w_2d}{w_1d} \cdot \dfrac{x_1a}{(1-x_1)a} \cdot \dfrac{(1-y_1)b}{y_1b+b_1} = 1, \\ \dfrac{b_1+y_1b}{-y_1b} \cdot \dfrac{z_1c}{(1-z_1)c} \cdot \dfrac{-w_2d}{w_2d+d_1} = 1, \end{cases}$$

把 d_1、d_2 的值代入方程组中，w_2 换成 $1-w_1$，解这个方程组可得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{w_1a_1c}{w_1a_1c + w_2a(c+c_1)}, \\ y_1 = \dfrac{w_1a_1c^2(a+a_1)}{w_1a_1c^2(a+a_1) + w_2a^2c_1(c+c_1)}, \\ z_1 = \dfrac{w_1c(a+a_1)}{w_1c(a+a_1) + w_2ac_1}, \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{w_1a_1c}{w_1a_1c + w_2a(c+c_1)}, \\ x_2 = \dfrac{w_2a(c+c_1)}{w_1a_1c + w_2a(c+c_1)}, \\ y_1 = \dfrac{w_1a_1c^2(a+a_1)}{w_1a_1c^2(a+a_1) + w_2a^2c_1(c+c_1)}, \\ y_2 = \dfrac{w_2a^2c_1(c+c_1)}{w_1a_1c^2(a+a_1) + w_2a^2c_1(c+c_1)}, \\ z_1 = \dfrac{w_1c(a+a_1)}{w_1c(a+a_1) + w_2ac_1}, \\ z_2 = \dfrac{w_2ac_1}{w_1c(a+a_1) + w_2ac_1}, \end{cases}$$

由此可知当 $0 < w_1 < 1$ 时所有切点都是边的内分点，当 $w_1 < 0$ 或 $w_1 > 1$ 时所有切点都是边的外分点，并且

$$\begin{aligned} ET : TB &= a_1c_1(ac + w_2ac_1 + w_1a_1c) : w_2a^2c_1(c+c_1), \\ BU : UC &= w_2a^2c_1(c+c_1) : w_1a_1c^2(a+a_1), \\ CV : VE &= w_1a_1c^2(a+a_1) : a_1c_1(ac + w_2ac_1 + w_1a_1c), \end{aligned}$$

可令 $k_1=a_1c_1(ac+w_2ac_1+w_1a_1c)$，$k_2=w_2a^2c_1(c+c_1)$，$k_3=w_1a_1c^2(a+a_1)$，那么

$$\begin{aligned}a'&=k_2+k_3=w_2a^2c_1(c+c_1)+w_1a_1c^2(a+a_1),\\ b'&=k_3+k_1=a_1(c+c_1)(w_2ac_1+w_1c(a+a_1)),\\ c'&=k_1+k_2=c_1(a+a_1)(w_2a(c+c_1)+wa_1c),\end{aligned}$$

由 $\triangle EBC$ 的内切椭圆结论可得

$$\begin{aligned}(pq)^2&=\frac{\alpha(|BC|,|EC|,|EB|,a',b',c')^2-4\beta(|BC|,|EC|,|EB|,a',b',c')}{16(a'+b'+c')^4}\\&=\frac{w_1w_2a^2a_1^2c^2c_1^2S^2_{\triangle EBC}(ac+w_2ac_1+w_1a_1c)}{(a+a_1)^2(c+c_1)^2(w_2ac_1+w_1a_1c)^3},\end{aligned}$$

上式 w_2 换成 $1-w_1$，令

$$g(w_1)=\frac{w_1(1-w_1)(ac+(1-w_1)ac_1+w_1a_1c)}{((1-w_1)ac_1+w_1a_1c)^3},$$

则

$$g'(w_1)=\frac{(ac_1-a_1c)(ac-ac_1-a_1c)w_1^2+2a(ac_1^2+a_1c^2)w_1-a^2c_1(c+c_1)}{((1-w_1)ac_1+w_1a_1c)^4},$$

再令

$$g_1(w_1)=(ac_1-a_1c)(ac-ac_1-a_1c)w_1^2+2a(ac_1^2+a_1c^2)w_1-a^2c_1(c+c_1),$$

则

$$g_1(0)=-a^2c_1(c+c_1)<0,\ g_1(1)=ac^2(a+a_1)>0,$$

所以 $g_1(w_1)=0$ 必定有一根满足 $0<w_1<1$. 若 $(ac_1-a_1c)(ac-ac_1-a_1c)=0$, 则必定 $ac-ac_1-a_1c=0$, 否则 $ac_1-a_1c=0$ 将得 $AD\,/\!/\,BC$，与四边形 $ABCD$ 无两边平行矛盾，所以

$$c_1=\frac{c(a-a_1)}{a},$$

此时要 $g_1(w_1)=0$，则

$$w_1=\frac{(a-a_1)(2a-a_1)}{2(a^2-aa_1+a_1)^2},$$

由 w_1 的值可得 w_2、x_1、x_2、y_1、y_2、z_1、z_2 的值，并且

$$pq\leqslant\frac{S_{\triangle EBC}}{3\sqrt{3}},$$

即内切椭圆面积最大值是

$$\frac{\pi S_{\triangle EBC}}{3\sqrt{3}}.$$

若 $(ac_1-a_1c)(ac-ac_1-a_1c)\neq 0$，则当 $(ac_1-a_1c)(ac-ac_1-a_1c)>0$ 时 $g_1(w_1)=0$ 的根一正一负，当 $(ac_1-a_1c)(ac-ac_1-a_1c)<0$ 时，因为

$$1-\left(-\frac{a(ac_1^2+a_1c^2)}{(ac_1-a_1c)(ac-ac_1-a_1c)}\right)=\frac{c(a^2c_1+a_1^2c)}{(ac_1-a_1c)(ac-ac_1-a_1c)}>0,$$

所以 $g_1(w_1)=0$ 的根一个在区间 $(0,1)$ 内另一个在区间 $(1,+\infty)$ 内，无论 $(ac_1-a_1c)(ac-ac_1-a_1c)$ 的符号是哪种情况，满足 w_1 是内分点且 $(pq)^2$ 取得极大值的 w_2 的值是

$$w_2=\frac{ac\sqrt{\varDelta}-a(ac_1^2+a_1c^2)}{(ac_1-a_1c)(ac-ac_1-a_1c)},$$

其中

$$\varDelta=a^2c_1^2+a_1^2c^2+a_1^2c_1^2-a_1c_1(ac-ac_1-a_1c),$$

由 w_1 的值可得 w_2、x_1、x_2、y_1、y_2、z_1、z_2 的值，并且

$$pq\leqslant\frac{S_{\triangle EBC}\sqrt{ac\left(2\sqrt{\varDelta^3}-T\right)}}{3\sqrt{3}(a+a_1)(c+c_1)|ac_1-a_1c|},$$

其中

$$T=(ac_1+a_1c+2a_1c_1)(2ac_1-a_1c+a_1c_1)(-ac_1+2a_1c+a_1c_1),$$

即内切椭圆面积最大值是

$$\frac{\pi S_{\triangle EBC}\sqrt{ac\left(2\sqrt{\varDelta^3}-T\right)}}{3\sqrt{3}(a+a_1)(c+c_1)|ac_1-a_1c|}.$$

再由 $\triangle EBC$ 的内切椭圆结论可得相切圆锥曲线的离心率范围，离心率最大最小值一般要解 w_1 的一元四次方程，结论较为复杂.

若相切圆锥曲线是抛物线，则 $k_1+k_2+k_3=0$，由此得

$$\begin{cases}w_1=\dfrac{ac_1}{ac_1-a_1c}=\dfrac{b+b_1}{b},\\ w_2=-\dfrac{a_1c}{ac_1-a_1c}=-\dfrac{b_1}{b},\\ x_1=-\dfrac{c_1}{c},\\ x_2=\dfrac{c+c_1}{c},\\ y_1=-\dfrac{c(a+a_1)}{ac_1-a_1c}=-\dfrac{d_1}{d},\\ y_2=\dfrac{a(c+c_1)}{ac_1-a_1c}=\dfrac{d+d_1}{d},\\ z_1=\dfrac{a+a_1}{a},\\ z_2=-\dfrac{a_1}{a},\end{cases}$$

再由 $\triangle EBC$ 的相切抛物线的结论就可以得到焦点、焦点与准线的距离、顶点的信息.

由上面的讨论还可看出给定切点的与四边形各边都相切的圆锥曲线是唯一存在的.

三角形的外接圆锥曲线

为了方便讨论，首先定义三角形的有向面积. 对于给定 $\triangle ABC$，D 是 $\triangle ABC$ 所在平面内任意一点，定义 $\overline{S_{\triangle BCD}}$ 的值是 $\triangle BCD$ 的有向面积，其值规定如下：$\left|\overline{S_{\triangle BCD}}\right|=S_{\triangle BCD}$；当点 A、D 在直线 BC 同侧时是正的；当点 A、D 在直线 BC 异侧时是负的；当 D 在直线 BC 上时是 0. $\overline{S_{\triangle CAD}}$、$\overline{S_{\triangle ABD}}$ 的值类似上述定义. 对于其他三角形与三角形一边重合的三角形的有向面积均如上述定义. 三角形内角的对顶角所包含的区域称为三角形的临顶区，不是三角形边所在直线、内部、临顶区的区域称为临边区.

当中心是 BC 或 CA 或 AB 的中点时，圆锥曲线不能确定；当中心不是 BC、CA、AB 的中点，但在 $\triangle ABC$ 的某一中位线上时，二次曲线显然是两条平行直线；当中心不是 BC、CA、AB 的中点，但在 $\triangle ABC$ 的某一边所在的直线上时，二次曲线显然是两条相交直线. 下面假设中心不在 $\triangle ABC$ 的任意一条中位线上且不在任意一边所在的直线上.

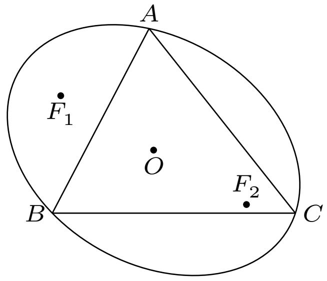

图 6

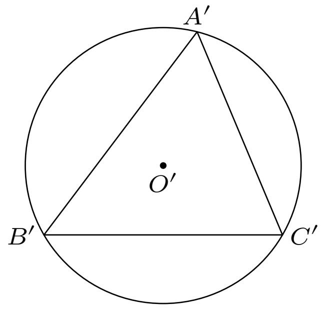

图 7

如图 6，设 $\triangle ABC$ 的外接椭圆的中心是 O，两焦点分别是 F_1、F_2，长半轴长是 p，短半轴长是 q，$|BC|=a$，$|CA|=b$，$|AB|=c$，$\overline{S_{\triangle OBC}}:\overline{S_{\triangle OCA}}:\overline{S_{\triangle OAB}}=\alpha:\beta:\gamma$，$\alpha+\beta+\gamma=1$．设这个椭圆是由 $\triangle A'B'C'$ 的外接圆（图 7）通过仿射变换得到的，点 A' 变成点 A，点 B' 变成点 B，点 C' 变成点 C，且 $S_{\triangle A'B'C'}=1$，$\triangle A'B'C'$ 的外接圆圆心是 O'，半径是 R'，内切圆圆心是 I'，半径是 r'，内切圆 I' 变成的椭圆 I' 长半轴长是 p_1，短半轴长是 q_1，则点 O' 变成点 O，椭圆 O 的长轴、短轴分别与椭圆 I 的长轴、短轴平行，且

$$\frac{p}{p_1}=\frac{q}{q_1}=\frac{R'}{r'}.$$

设 $B'C'=a'$，$C'A'=b'$，$A'B'=c'$，由仿射变换的性质得

$$\overline{S_{\triangle O'B'C'}}=\alpha,\ \overline{S_{\triangle O'C'A'}}=\beta,\ \overline{S_{\triangle O'A'B'}}=\gamma,$$

由此得

$$\begin{cases}a'^2(b'^2+c'^2-a'^2)=16\alpha, & (2)\\ b'^2(c'^2+a'^2-b'^2)=16\beta, & (3)\\ c'^2(a'^2+b'^2-c'^2)=16\gamma. & (4)\end{cases}$$

由 (2)、(3)、(4) 及三角形最多只有一个角不是锐角可知 α、β、γ 中最多只能有一个不是正数.

若点 O 都不在直线 BC、CA、AB 上，A、B、C 关于点 O 的对称点分别是 A'、B'、C'，则 A、B、C、A'、B'、C' 都在外接椭圆上，且没有任何四点共线，此时 $\triangle ABC$ 的外接椭圆是唯一确定的，且 $\alpha\beta\gamma\neq 0$. $((2)-(3))/(4)$ 得

$$\frac{a'^2-b'^2}{c'^2}=\frac{\beta-\alpha}{\gamma},$$

同理可得

$$\frac{a'^2-c'^2}{b'^2}=\frac{\gamma-\alpha}{\beta},\ \frac{b'^2-c'^2}{a'^2}=\frac{\gamma-\beta}{\alpha},$$

可设

$$a'^2=t\alpha,\ b'^2=u\beta,\ c'^2=v\gamma,$$
$$b'^2-c'^2=t(\gamma-\beta),\ a'^2-c'^2=u(\gamma-\alpha),\ a'^2-b'^2=v(\beta-\alpha),$$

把上一组值代入下面的方程中，可得

$$t:u:v=(-\alpha+\beta+\gamma):(\alpha-\beta+\gamma):(\alpha+\beta-\gamma),$$

若 $\alpha=\beta+\gamma$，则 $t=0$，于是 $a'=0$，这是不可能的，所以不能 $\alpha=\beta+\gamma$，同理可得不可能有 $\beta=\alpha+\gamma$ 和 $\gamma=\alpha+\beta$．令

$$t=(-\alpha+\beta+\gamma)k,\ u=(\alpha-\beta+\gamma)k,\ v=(\alpha+\beta-\gamma)k,$$

则

$$a'^2=\alpha(-\alpha+\beta+\gamma)k,\ b'^2=\beta(\alpha-\beta+\gamma)k,\ c'^2=\gamma(\alpha+\beta-\gamma)k,$$

把上述值代入 (2)，得

$$k=\pm\frac{4}{\sqrt{(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}}=\pm\frac{4}{\sqrt{(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}},$$

若 $\alpha<0$,则必定 $\beta>0$、$\gamma>0$,此时必定 $-\alpha+\beta+\gamma>0$ 要使 $\triangle A'B'C'$ 存在,必须 $(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)>0$. 因为 $\alpha+\beta+\gamma=1$，所以 $1-2\alpha$、$1-2\beta$、$1-2\gamma$ 或者全是正的或者两个是负的一个是正的，总有

$$\begin{cases} a'=2\sqrt{\dfrac{\alpha(1-2\alpha)}{\sqrt{(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}}}, \\ b'=2\sqrt{\dfrac{\beta(1-2\beta)}{\sqrt{(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}}}, \\ c'=2\sqrt{\dfrac{\gamma(1-2\gamma)}{\sqrt{(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}}}, \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a'=2\sqrt{\dfrac{-\alpha(1-2\alpha)}{\sqrt{(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}}}, \\ b'=2\sqrt{\dfrac{-\beta(1-2\beta)}{\sqrt{(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}}}, \\ c'=2\sqrt{\dfrac{-\gamma(1-2\gamma)}{\sqrt{(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}}}. \end{cases}$$

设

$$\begin{aligned} U&=(1-2\beta)(1-2\gamma)a^2+(1-2\alpha)(1-2\gamma)b^2+(1-2\alpha)(1-2\beta)c^2, \\ V&=\beta\gamma(1-2\beta)(1-2\gamma)a^4+\alpha\gamma(1-2\alpha)(1-2\gamma)b^4+\alpha\beta(1-2\alpha)(1-2\beta)c^4 \\ &\quad-(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)(\gamma a^2b^2+\beta a^2c^2+\alpha b^2c^2), \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} p_1&=\frac{\sqrt{U+2\sqrt{V}}}{2\left(\sqrt{\alpha(1-2\alpha)}+\sqrt{\beta(1-2\beta)}+\sqrt{\gamma(1-2\gamma)}\right)}, \\ q_1&=\frac{\sqrt{U-2\sqrt{V}}}{2\left(\sqrt{\alpha(1-2\alpha)}+\sqrt{\beta(1-2\beta)}+\sqrt{\gamma(1-2\gamma)}\right)}, \\ \frac{R'}{r'}&=2\sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma}{(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}}\left(\sqrt{\alpha(1-2\alpha)}+\sqrt{\beta(1-2\beta)}+\sqrt{\gamma(1-2\gamma)}\right), \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} p_1&=\frac{\sqrt{-U+2\sqrt{V}}}{2\left(\sqrt{-\alpha(1-2\alpha)}+\sqrt{-\beta(1-2\beta)}+\sqrt{-\gamma(1-2\gamma)}\right)}, \\ q_1&=\frac{\sqrt{-U-2\sqrt{V}}}{2\left(\sqrt{-\alpha(1-2\alpha)}+\sqrt{-\beta(1-2\beta)}+\sqrt{-\gamma(1-2\gamma)}\right)}, \end{aligned}$$

$$\frac{R'}{r'}=2\sqrt{\frac{-\alpha\beta\gamma}{(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}}\Big(\sqrt{-\alpha(1-2\alpha)}+\sqrt{-\beta(1-2\beta)}+\sqrt{-\gamma(1-2\gamma)}\Big),$$

所以当 $\alpha\beta\gamma>0$，即 O 在 $\triangle ABC$ 内部时 $U>0$ 且

$$p=\sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma\big(U+2\sqrt{V}\big)}{(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}},\ q=\sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma\big(U-2\sqrt{V}\big)}{(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}},$$

当 $\alpha\beta\gamma>0$，即 O 在 $\triangle ABC$ 内部时 $U<0$ 且

$$p=\sqrt{\frac{-\alpha\beta\gamma\big(-U+2\sqrt{V}\big)}{(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}},\ q=\sqrt{\frac{-\alpha\beta\gamma\big(-U-2\sqrt{V}\big)}{(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}},$$

因此综合可表示为

$$p=\sqrt{\frac{|\alpha\beta\gamma|\big(|U|+2\sqrt{V}\big)}{(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}},\ q=\sqrt{\frac{|\alpha\beta\gamma|\big(|U|-2\sqrt{V}\big)}{(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}}.$$

显然

$$\overline{S_{F_1BC}}+\overline{S_{F_1CA}}+\overline{S_{F_1AB}}=\overline{S_{F_2BC}}+\overline{S_{F_2CA}}+\overline{S_{F_2AB}}=S_{\triangle ABC}.$$

因为点 O 是 F_1F_2 的中点，所以

$$\overline{S_{F_1BC}}+\overline{S_{F_2BC}}=2\alpha S_{\triangle ABC},\ \overline{S_{F_1CA}}+\overline{S_{F_2CA}}=2\beta S_{\triangle ABC},\ \overline{S_{F_1AB}}+\overline{S_{F_2AB}}=2\gamma S_{\triangle ABC}.$$

设椭圆 I 的焦点分别是 F_1'、F_2'，点 F_1、F_1' 在直线 OI 同侧，点 F_2、F_2' 在直线 OI 同侧，则

$$\frac{r'}{R'}\Big(\alpha S_{\triangle ABC}-\overline{S_{F_1BC}}\Big)=\frac{a'}{a'+b'+c'}S_{\triangle ABC}-S_{F_1'BC},$$

所以

$$S_{F_1'BC}=\frac{a'}{a'+b'+c'}S_{\triangle ABC}+\frac{r'}{R'}\Big(\overline{S_{F_1BC}}-\alpha S_{\triangle ABC}\Big),$$

同理得

$$S_{F_2'BC}=\frac{a'}{a'+b'+c'}S_{\triangle ABC}+\frac{r'}{R'}\Big(\overline{S_{F_2BC}}-\alpha S_{\triangle ABC}\Big),$$

由内切椭圆焦点的结论整理化简得

$$\overline{S_{F_1BC}}\cdot\overline{S_{F_2BC}}=\frac{a^2q^2}{4}-\frac{\alpha^2(1-2\alpha)}{(1-2\beta)(1-2\gamma)}S_{\triangle ABC}^2,$$

同理可得

$$\overline{S_{F_1CA}}\cdot\overline{S_{F_2CA}}=\frac{b^2q^2}{4}-\frac{\beta^2(1-2\beta)}{(1-2\alpha)(1-2\gamma)}S_{\triangle ABC}^2,$$
$$\overline{S_{F_1AB}}\cdot\overline{S_{F_2AB}}=\frac{c^2q^2}{4}-\frac{\gamma^2(1-2\gamma)}{(1-2\alpha)(1-2\beta)}S_{\triangle ABC}^2.$$

类似内切椭圆的讨论知 $\overline{S_{F_1BC}}$、$\overline{S_{F_2BC}}$、$\overline{S_{F_1CA}}$、$\overline{S_{F_2CA}}$、$\overline{S_{F_1AB}}$、$\overline{S_{F_2AB}}$ 只有两组解．令

$$\overline{S_{F_1BC}}=\alpha S_{\triangle ABC}+S_A,\ \overline{S_{F_2BC}}=\alpha S_{\triangle ABC}-S_A,$$
$$\overline{S_{F_1CA}}=\beta S_{\triangle ABC}+S_B,\ \overline{S_{F_2CA}}=\beta S_{\triangle ABC}-S_B,$$
$$\overline{S_{F_1AB}}=\gamma S_{\triangle ABC}+S_C,\ \overline{S_{F_2AB}}=\gamma S_{\triangle ABC}-S_C,$$

则

$$
\begin{aligned}
&S_A+S_B+S_C=0,\\
&S_A^2=\frac{4\alpha^2\beta\gamma}{(1-2\beta)(1-2\gamma)}S_{\triangle ABC}^2-\frac{a^2q^2}{4},\\
&S_B^2=\frac{4\alpha\beta^2\gamma}{(1-2\alpha)(1-2\gamma)}S_{\triangle ABC}^2-\frac{b^2q^2}{4},\\
&S_C^2=\frac{4\alpha\beta\gamma^2}{(1-2\alpha)(1-2\beta)}S_{\triangle ABC}^2-\frac{c^2q^2}{4}.
\end{aligned}
$$

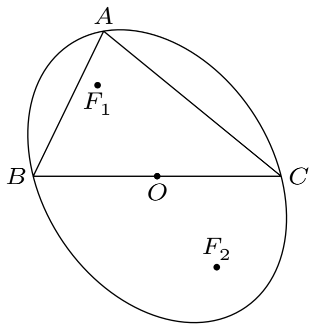

图 8

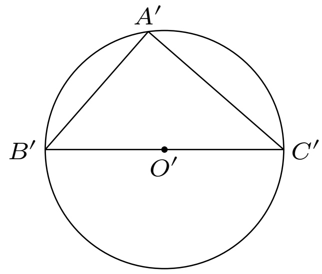

图 9

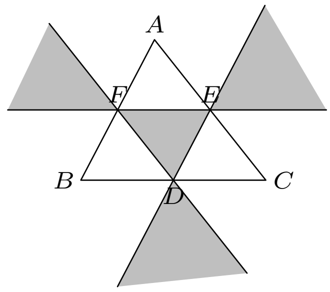

图 10

若点 O 都在直线 BC、CA、AB 其中之一上，例如点 O 在直线 BC 上，由 (2) 得

$$a'^2=b'^2+c'^2,$$

即 $\angle A'=90^\circ$，再由 (3)、(4) 得

$$8\beta=8\gamma=b'^2c'^2,$$

所以

$$\alpha=0,\ \beta=\gamma=\frac{1}{2},$$

即点 O 是 BC 的中点（图 8），$\triangle A'B'C'$ 是 $\angle A'$ 是直角的直角三角形（图 9），综合上面的讨论知点 O 在图 10 所示直线 DE、DF、EF 所围的灰色区域内（不包含边界，但包含点 D、E、F）时 $\triangle ABC$ 的外接椭圆才存在，其中点 D、E、F 分别是 BC、CA、AB 的中点.

因为定圆内接三角形中等边三角形的面积最大，所以定三角形的外接椭圆中，中心是三角形的重心的外接椭圆面积最大.

定义 1. 中心是三角形重心且过该三角形三顶点的椭圆称为该三角形的外接 Steiner 椭圆.

由上面的构造方法可知，设 $\triangle ABC$ 的重心是 G，$\triangle ABC$ 的内切 Steiner 椭圆的焦点分别是 F_1'、F_2'，则直线 F_1F_2 与直线 $F_1'F_2'$ 重合. 若点 F_1、F_1' 在点 G 同侧，点 F_2、F_2' 在点 G 同侧，且 $|GF_1|=|GF_2|=2|GF_1'|=2|GF_2'|$. 所以点 F_1、F_2 就是 $\triangle ABC$ 的等长点.

对于双曲线，只需要用椭圆上的虚点 $(x,\mathrm{i}y)$ 即可得到结论.

设 $\triangle ABC$ 的外接双曲线的中心是 O，两焦点分别是 F_1、F_2，实半轴长是 p，虚半轴长是 q，$|BC|=a$，$|CA|=b$，$|AB|=c$，$\overline{S_{\triangle OBC}}:\overline{S_{\triangle OCA}}:\overline{S_{\triangle OAB}}=\alpha:\beta:\gamma$，$\alpha+\beta+\gamma=1$，则必定 $(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)<0$. 设

$$
\begin{aligned}
&U=(1-2\beta)(1-2\gamma)a^2+(1-2\alpha)(1-2\gamma)b^2+(1-2\alpha)(1-2\beta)c^2,\\
&V=\beta\gamma(1-2\beta)(1-2\gamma)a^4+\alpha\gamma(1-2\alpha)(1-2\gamma)b^4+\alpha\beta(1-2\alpha)(1-2\beta)c^4
\end{aligned}
$$

$$-(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)(\gamma a^2b^2+\beta a^2c^2+\alpha b^2c^2),$$

则当 $\alpha\beta\gamma>0$，即点 O 在 $\triangle ABC$ 内或 $\triangle ABC$ 的临顶区时，

$$p=\sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma\left(-U+2\sqrt{V}\right)}{-(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}},\ q=\sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma\left(U+2\sqrt{V}\right)}{-(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}},$$

当 $\alpha\beta\gamma<0$，即点 O 在 $\triangle ABC$ 的临边区时，

$$p=\sqrt{\frac{-\alpha\beta\gamma\left(U+2\sqrt{V}\right)}{-(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}},\ q=\sqrt{\frac{-\alpha\beta\gamma\left(-U+2\sqrt{V}\right)}{-(1-2\alpha)(1-2\beta)(1-2\gamma)}},$$

且有

$$\begin{aligned}
&\overline{S_{F_1BC}}=\alpha S_{\triangle ABC}+S_A,\ \overline{S_{F_2BC}}=\alpha S_{\triangle ABC}-S_A,\\
&\overline{S_{F_1CA}}=\beta S_{\triangle ABC}+S_B,\ \overline{S_{F_2CA}}=\beta S_{\triangle ABC}-S_B,\\
&\overline{S_{F_1AB}}=\gamma S_{\triangle ABC}+S_C,\ \overline{S_{F_2AB}}=\gamma S_{\triangle ABC}-S_C,\\
&S_A+S_B+S_C=0,\\
&S_A^2=\frac{4\alpha^2\beta\gamma}{(1-2\beta)(1-2\gamma)}S_{\triangle ABC}^2+\frac{a^2q^2}{4},\\
&S_B^2=\frac{4\alpha\beta^2\gamma}{(1-2\alpha)(1-2\gamma)}S_{\triangle ABC}^2+\frac{b^2q^2}{4},\\
&S_C^2=\frac{4\alpha\beta\gamma^2}{(1-2\alpha)(1-2\beta)}S_{\triangle ABC}^2+\frac{c^2q^2}{4}.
\end{aligned}$$

四边形的外接圆锥曲线

定理 10. 非梯形、平行四边形的四边形外接二次曲线中心的轨迹是有心二次曲线.

证明： 以 AC、BD 的交点为原点，AC、BD 夹角的平分线为 x 轴建立坐标系，设 AC、BD 的方程分别是 $y=kx$、$y=-kx$，直线 AB、CD 的方程分别是 $A_1x+B_1y+C_1=0$、$A_2x+B_2y+C_2=0$，则四边形 $ABCD$ 的外接二次曲线除相交直线 AC、BD 外都可写为

$$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)+\lambda(kx-y)(kx+y)=0,$$

这条二次曲线的中心的坐标是方程组

$$\begin{cases}A_1(A_2x+B_2y+C_2)+A_2(A_1x+B_1y+C_1)+k\lambda((kx+y)+(kx-y))=0,\\ B_1(A_2x+B_2y+C_2)+B_2(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(-(kx+y)+(kx-y))=0,\end{cases}$$

的解，由上面方程组的方程中分别求出 λ，得

$$\lambda=-\frac{2A_1A_2x+(A_1B_2+A_2B_1)y+A_1C_2+A_2C_1}{2k^2x}=\frac{(A_1B_2+A_2B_1)x+2B_1B_2y+B_1C_2+B_2C_1}{2y},$$

上面的方程整理得

$$\begin{aligned}&(A_2B_1+A_1B_2)k^2x^2+2(A_1A_2+B_1B_2k^2)xy+(A_2B_1+A_1B_2)y^2\\&+(B_2C_1+B_1C_2)k^2x+(A_2C_1+A_1C_2)y=0,\end{aligned}$$

显然原点满足上面的方程，即直线 AC、BD 的交点也在上述方程表示的曲线上，且

$$(A_1A_2+B_1B_2k^2)^2-(A_2B_1+A_1B_2)k^2\cdot(A_2B_1+A_1B_2)$$

$$= (A_1 + B_1 k)(A_1 - B_1 k)(A_2 + B_2 k)(A_2 - B_2 k) \neq 0,$$

所以四边形外接二次曲线中心的轨迹是有心二次曲线. □

类似定理 9 的证明可得

定理 11. 梯形外接非退化二次曲线中心的轨迹是两条平行边中点的连线；平行四边形外接非退化二次曲线中心的轨迹是平行四边形对角线的交点.

定理 12. 四边形 $ABCD$ 中 AB、BC、CD、DA、AC、BD 的中点，直线 AB、CD 的交点（若存在），直线 AC、BD 的交点（若存在），直线 AD、BC 的交点（若存在），这些点都在四边形 $ABCD$ 的外接二次曲线的中心所形成的轨迹线上.

证明： 设 AB 的中点是 P，点 C 关于点 P 的对称点是 P'，则点 A、B、C、D、P' 没有任何四点共线，所以过点 A、B、C、D、P' 的二次曲线是唯一的，且点 P 就是其中心，所以点 P 在四边形 $ABCD$ 的外接二次曲线的中心所形成的轨迹线上. 同理可证 BC、CD、DA、AC、BD 的中点都在四边形 $ABCD$ 的外接二次曲线的中心所形成的轨迹线上.

设直线 AB、CD 的交点的交点是 Q，因为直线 AB、CD 就是其中一条四边形 $ABCD$ 的外接二次曲线，且其中心就是点 Q，所以点 Q 在四边形 $ABCD$ 的外接二次曲线的中心所形成的轨迹线上. 同理可证直线 AC、BD 的交点（若存在），直线 AD、BC 的交点（若存在），这些点都在四边形 $ABCD$ 的外接二次曲线的中心所形成的轨迹线上. □

推论 1. 四边形外接二次曲线中心轨迹二次曲线的中心是四边形是两组对边中点的连线的交点.

证明： 四边形 $ABCD$ 中 AB、BC、CD、DA 的中点分别是 M_1、M_2、M_3、M_4，则四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 是平行四边形，所以 $\square M_1M_2M_3M_4$ 外接二次曲线的中心是 $\square M_1M_2M_3M_4$ 对角线的交点，所以四边形 $ABCD$ 外接二次曲线中心轨迹二次曲线的中心是四边形是两组对边中点的连线的交点. □

因为过凸四边形四顶点及其对角线交点的二次曲线一定是双曲线或一对相交直线，所以凸四边形的外接椭圆的中心是双曲线或一对相交直线. 由三角形外接椭圆中心的位置便可确定中心的位置范围，在此范围内的中心二次曲线轨迹上任意选择一点便可得一外接椭圆. 梯形外接椭圆的中心在两底中点的连线上，且位于起点是两组对边中点的交点含较长底中点一侧的射线上；平行四边形外接椭圆的中心一定是对角线的交点. 若给定四边形以及外接椭圆的中心，可转化为三角形的外接椭圆问题去解决.

若给定四点其中至少有三点共线，则过这四定点的任何外接二次曲线必定是两条直线. 以下设给定的四点没有任何三点共线，那么以这四个定点为顶点的四边形必定能构成凸四边形或凹四边形，这个四边形按顺序的四边所在直线方程分别是 $A_ix + B_iy + C_i = 0$（$i = 1, 2, 3, 4$），用斜率的分类讨论容易得：当四边形是凸四边形时有

$$(A_1B_2 - A_2B_1)(A_2B_3 - A_3B_2)(A_3B_4 - A_4B_3)(A_4B_1 - A_1B_4) > 0,$$

当四边形是凹四边形时有

$$(A_1B_2 - A_2B_1)(A_2B_3 - A_3B_2)(A_3B_4 - A_4B_3)(A_4B_1 - A_1B_4) < 0.$$

对于凸四边形利用对角和是 180° 共圆以及斜率与角的关系可得

$$\begin{aligned} &A_1A_2A_3B_4 - A_1A_2B_3A_4 + A_1B_2A_3A_4 - B_1A_2A_3A_4 \\ &+ A_1B_2B_3B_4 - B_1A_2B_3B_4 + B_1B_2A_3B_4 - B_1B_2B_3A_4 = 0, \end{aligned}$$

反之若上式成立则可得到凸四边形对角和是 180°.

定理 13. 令

$$\begin{aligned}
K_1 &= (A_1B_2-A_2B_1)(A_2B_3-A_3B_2)(A_3B_4-A_4B_3)(A_4B_1-A_1B_4),\\
K_2 &= A_1A_2A_3B_4-A_1A_2B_3A_4+A_1B_2A_3A_4-B_1A_2A_3A_4\\
&\quad +A_1B_2B_3B_4-B_1A_2B_3B_4+B_1B_2A_3B_4-B_1B_2B_3A_4,\\
K_3 &= 2(A_1^2A_3^2B_2B_4+B_1^2B_3^2A_2A_4)+(A_1^2B_3^2+A_3^2B_1^2)(A_2A_4+B_2B_4)\\
&\quad -(A_1A_3+B_1B_3)(A_1B_3+A_3B_1)(A_2B_4+A_4B_2),\\
K_4 &= 2(A_2^2A_4^2B_1B_3+B_2^2B_4^2A_1A_3)+(A_2^2B_4^2+A_4^2B_2^2)(A_1A_3+B_1B_3)\\
&\quad -(A_2A_4+B_2B_4)(A_1B_3+A_3B_1)(A_2B_4+A_4B_2),
\end{aligned}$$

给定凸四边形或凹四边形 P 的四顶点，P 按顺序的四边所在直线方程分别是 $A_ix+B_iy+C_i=0$（$i=1,2,3,4$），圆锥曲线 Γ 是 P 的外接圆锥曲线，其离心率是 e，令

$$\begin{aligned}
g_1(u) &= K_1u^4+K_2^2(u^2-1),\\
g_2(x,y) &= K_3(A_1x+B_1y+C_1)(A_3x+B_3y+C_3)+K_4(A_2x+B_2y+C_2)(A_4x+B_4y+C_4),\\
g_3(x,y) &= (A_2A_4+B_2B_4)(A_1x+B_1y+C_1)(A_3x+B_3y+C_3)\\
&\quad -(A_1A_3+B_1B_3)(A_2x+B_2y+C_2)(A_4x+B_4y+C_4).
\end{aligned}$$

当 P 是凸四边形时，$g_1(u)=0$ 只有一个非负 u_1，其中 $u_1<1$，则 $e\geqslant u_1$，$e=u_1$ 时外接圆锥曲线是 $g_2(x,y)=0$，当且仅当 $K_2=0$ 时外接二次曲线是圆，若二次曲线 $g_3(x,y)=0$ 非退化，则 $e=\sqrt{2}$ 时外接圆锥曲线是 $g_3(x,y)=0$；当 P 是凹四边形时，若 P 两对对边都互相垂直，则外接圆锥曲线必定 $e=\sqrt{2}$，即为等轴双曲线；若 P 两对对边不都互相垂直，则 $g_1(u)=0$ 有两个正根 u_1、u_2，其中 $1<u_1<\sqrt{2}<u_2$，则 $u_1\leqslant e\leqslant u_2$，若二次 $g_2(x,y)=0$ 非退化，则 $e=u_1$ 或 $e=u_2$ 时外接圆锥曲线是 $g_2(x,y)=0$，若二次曲线 $g_3(x,y)=0$ 非退化，则 $e=\sqrt{2}$ 时外接圆锥曲线是 $g_3(x,y)=0$.

证明： 因为 P 的外接圆锥曲线 Γ 可写为

$$(A_1x+B_1y+C_1)(A_3x+B_3y+C_3)+t(A_2x+B_2y+C_2)(A_4x+B_4y+C_4)=0,$$

展开得

$$\begin{aligned}
&(A_1A_3+A_2A_4t)x^2+(A_1B_3+A_3B_1+(A_2B_4+A_4B_2)t)xy+(B_1B_3+B_2B_4t)y^2\\
&+(A_1C_3+A_3C_1+(A_2C_4+A_4C_2)t)x+(B_1C_3+B_3C_1+(B_2C_4+B_4C_2)t)y+C_1C_3+C_2C_4t=0,
\end{aligned}$$

计算 Γ 方程的不变量得

$$\begin{aligned}
I_1 &= A_1A_3+B_1B_3+(A_2A_4+B_2B_4)t,\\
I_2 &= -\frac{(A_1B_3+A_3B_1)^2+2K_5t+(A_2B_4-A_4B_2)^2t^2}{4},\\
I_3 &= -\frac{t(K_6+K_7t)}{4},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
K_5 &= (A_1B_3+A_3B_1)(A_2B_4+A_4B_2)-2(A_1A_3B_2B_4+A_2A_4B_1B_3),\\
K_6 &= (A_1(B_2C_3-B_3C_2)+A_3(B_1C_2-B_2C_1)-A_2(B_1C_3-B_3C_1))\\
&\quad \cdot(A_1(B_4C_3-B_3C_4)+A_3(B_1C_4-B_4C_1)-A_4(B_1C_3-B_3C_1)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_7 = &(A_2(B_4C_1 - B_1C_4) + A_4(B_1C_2 - B_2C_1) - A_1(B_4C_2 - B_2C_4))\\ &\cdot (A_2(B_4C_3 - B_3C_4) + A_4(B_3C_2 - B_2C_3) - A_3(B_4C_2 - B_2C_4)).\end{aligned}$$

显然，当 P 是凹四边形时，且 P 两对对边都互相垂直，则必定 $A_1A_3 + B_1B_3 = 0$，$A_2A_4 + B_2B_4 = 0$，即外接圆锥曲线不退化时必定 $e = \sqrt{2}$．因为

$$I_2e^4 + (I_1^2 - 4I_2)(e^2 - 1) = 0,$$

整理得

$$\begin{aligned}&((A_2B_4 - A_4B_2)^2e^4 + 4(A_2^2 + B_2^2)(A_4^2 + B_4^2)(1 - e^2))t^2 + 2(K_8e^4 + 4K_9(1 - e^2))t\\ &+ (A_1B_3 - A_3B_1)^2e^4 + 4(A_1^2 + B_1^2)(A_3^2 + B_3^2)(1 - e^2) = 0,\end{aligned} \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}K_8 &= A_1A_2B_3B_4 + A_2A_3B_4B_1 + A_3A_4B_1B_2 + A_4A_1B_2B_3 - 2(A_1A_3B_2B_4 + A_2A_4B_1B_3),\\ K_9 &= A_1A_2A_3A_4 + B_1B_2B_3B_4 + A_1A_2B_3B_4 + A_2A_3B_4B_1 + A_3A_4B_1B_2 + A_4A_1B_2B_3\\ &\quad - (A_1A_3B_2B_4 + A_2A_4B_1B_3),\end{aligned}$$

若

$$(A_2B_4 - A_4B_2)^2e^4 + 4(A_2^2 + B_2^2)(A_4^2 + B_4^2)(1 - e^2) = 0,$$

换一种表示方法，可表示为

$$t(A_1x + B_1y + C_1)(A_3x + B_3y + C_3) + (A_2x + B_2y + C_2)(A_4x + B_4y + C_4) = 0,$$

此时只要

$$(A_1B_3 - A_3B_1)^2e^4 + 4(A_1^2 + B_1^2)(A_3^2 + B_3^2)(1 - e^2) \neq 0$$

时仍为 t 的二次方程，若

$$\begin{aligned}(A_2B_4 - A_4B_2)^2e^4 + 4(A_2^2 + B_2^2)(A_4^2 + B_4^2)(1 - e^2) = 0,\\ (A_1B_3 - A_3B_1)^2e^4 + 4(A_1^2 + B_1^2)(A_3^2 + B_3^2)(1 - e^2) = 0,\end{aligned}$$

此时必定 $t = 0$，二次曲线是退化的，因此不妨设

$$(A_2B_4 - A_4B_2)^2e^4 + 4(A_2^2 + B_2^2)(A_4^2 + B_4^2)(1 - e^2) \neq 0,$$

(5) 对 t 配方整理得

$$\begin{aligned}&\left(t + \frac{K_8e^4 + 4K_9(1 - e^2)}{(A_2B_4 - A_4B_2)^2e^4 + 4(A_2^2 + B_2^2)(A_4^2 + B_4^2)(1 - e^2)}\right)^2\\ &- \frac{4(e^2 - 2)^2g_1(e)}{\left((A_2B_4 - A_4B_2)^2e^4 + 4(A_2^2 + B_2^2)(A_4^2 + B_4^2)(1 - e^2)\right)^2} = 0,\end{aligned} \tag{6}$$

要使 (5) 有实数解，必须 $(e^2 - 2)^2g_1(e) \geqslant 0$，即 $e \neq \sqrt{2}$，$g_1(e) \geqslant 0$ 或 $e = \sqrt{2}$.

若 $g_1(e) = 0$，则

$$\frac{e^2 - 1}{e^4} = -\frac{K_1}{K_2^2},$$

此时

$$t=-\frac{K_8-4K_9\dfrac{e^2-1}{e^4}}{(A_2B_4-A_4B_2)^2-4(A_2^2+B_2^2)(A_4^2+B_4^2)\dfrac{e^2-1}{e^4}}=\frac{K_3}{K_4},$$

此时二次曲线的方程是

$$g_2(x,y)=0.$$

下面考察方程 $g_1(u)=0$ 的根．经过计算得

$$g_1(0)=-K_2^2,\ g_1(1)=K_1,\ g_1(\sqrt{2})=K_2^2+4K_1,$$

当 P 是凸四边形时 $K_1>0$，所以 $g_1(u)=0$ 只有非负根 u_1，其中 $u_1<1$，则 $e\geqslant u_1$，$e=u_1$ 时外接二次曲线是 $g_2(x,y)=0$，若二次曲线是退化的，则必定是一个点，这是不可能的，因此此时只能是椭圆或圆，当且仅当 $K_2=0$ 时外接二次曲线是圆．若二次曲线 $g_3(x,y)=0$ 非退化，则 $e=\sqrt{2}$ 时外接圆锥曲线是 $g_3(x,y)=0$．当 P 是凹四边形时，设对边不都互相垂直，则 $K_1<0$，所以 $g_1(1)<0$，计算 $K_2^2+4K_1$ 中 A_1^2 项和 B_1^2 项的系数分别是

$$\big(A_2(A_3A_4-B_3B_4)+B_2(A_3B_4-A_4B_3)\big)^2+4A_2^2A_4^2B_3^2, \tag{7}$$

$$\big(B_2(A_3A_4-B_3B_4)+A_2(A_3B_4-A_4B_3)\big)^2+4A_3^2A_2^2B_4^2. \tag{8}$$

若 (7) 值是 0，必定 A_2、A_4、B_3 其中之一是 0，当 $A_2=0$ 时，因为 $A_3B_4-A_4B_3\neq 0$，所以必须 $B_2=0$，这是不可能的，同理可得当 $A_4=0$ 是不可能的，所以只能 $B_3=0$；同理，若 (7) 值是 0，只能 $A_3=0$，由此可得 (7)、(7) 不可能同时取为 0，不妨设置(7) 值是正的，再计算关于 A_1 的判别式，得

$$-16B_1^2(A_2B_3-A_3B_2)^2(A_3B_4-A_4B_3)^2(A_2A_4+B_2B_4)^2\leqslant 0,$$

不妨设 $B_1\neq 0$，$A_2A_4+B_2B_4\neq 0$，若不满足条件则选其他参数作为变量参考，所以必定判别式是负，并且 $K_2\neq 0$，所以 $g(\sqrt{2})>0$，此时 $g_1(u)=0$ 有两个正根 u_1、u_2，其中 $1<u_1<\sqrt{2}<u_2$，则 $u_1\leqslant e\leqslant u_2$，若二次 $g_2(x,y)=0$ 非退化，则 $e=u_1$ 或 $e=u_2$ 时外接圆锥曲线是 $g_2(x,y)=0$，至于此时的离心率是 u_1 还是 u_2 要看实际情况而定．若二次曲线 $g_3(x,y)=0$ 非退化，则 $e=\sqrt{2}$ 时外接圆锥曲线是 $g_3(x,y)=0$．

对于 P 的对角线不都互相垂直时，由 (6) 可求得

$$t=-\frac{A_1A_3+B_1B_3}{A_2A_4+B_2B_4},$$

此时外接圆锥曲线是

$$g_3(x,y)=0,$$

其 x^2 项系数是 $A_1A_3B_2B_4-A_2A_4B_1B_3$，$y^2$ 项系数是 $A_2A_4B_1B_3-A_1A_3B_2B_4$，所以 x^2 项与 y^2 项系数之和是 0，所以只要 $g_3(x,y)=0$ 非退化，则必定 $e=\sqrt{2}$．只要 P 有一对对边互相垂直，则 $g_3(x,y)=0$ 必定退化． □

推论 2. 非自交四边形 $ABCD$ 的最小或最大外接圆锥曲线的离心率是 e，则

$$\frac{e^4}{1-e^2}=\frac{\sin^2(\angle A+\angle C)}{\sin\angle A\sin\angle B\sin\angle C\sin\angle D}.$$

若要求给定离心率且过四点的外接圆锥曲线，可利用 (5) 求出 t，然后就可得到二次曲线的方程，再验证是否退化和离心率是否满足要求即可．

若要求过四点的外接椭圆面积的最小值，可利用特征根，两特征根的积是 I_2，由此可得椭圆长半轴与短半轴积的平方是

$$\left(\frac{I_2}{I_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{I_2} = \frac{I_3^2}{I_2^3},$$

求这个关于 t 的函数在满足 $I_2 < 0$ 和 $I_1 I_3 < 0$ 的最小值就行，上式对 t 求导得

$$\left(\frac{I_3^2}{I_2^3}\right)' = \frac{I_3(2I_2 I_3' - 3I_2' I_3)}{I_2^4},$$

因为 $I_3 \neq 0$，所以只能

$$2I_2 I_3' - 3I_2' I_3 = 0,$$

一般情况下这是关于 t 的一元三次方程．例如，若四边方程是 $x = \pm a$，$y = kx \pm b$，其中 a、b 都是正数，那么过这四条直线交点的二次曲线可写为

$$t(x-a)(x+a) + (kx-y+b)(kx-y-b) = 0,$$

展开左边得

$$t(x-a)(x+a) + (kx-y+b)(kx-y-b) = (t+k^2)x^2 - 2kxy + y^2 - a^2t - b^2,$$

所以

$$I_1 = t + k^2 + 1,\quad I_2 = t,\quad I_3 = -t(a^2t + b^2),$$

由此得

$$\frac{I_3^2}{I_2^3} = \frac{(a^2t+b^2)^2}{t} = a^4t + \frac{b^4}{t} + 2a^2b^2.$$

要外接二次曲线是椭圆，必须 $I_2 > 0$，所以 $t > 0$，当 $t > 0$ 时候必定 $I_1 I_3 < 0$，所以

$$a^4t + \frac{b^4}{t} + 2a^2b^2 \geqslant 2\sqrt{a^4t \cdot \frac{b^4}{t}} + 2a^2b^2 = 4a^2b^2,$$

当且仅当 $t = \dfrac{b^2}{a^2}$ 时取得等号，此时

$$\frac{I_3^2}{I_2^3} \geqslant 4a^2b^2,$$

所以外接椭圆的最小面积是

$$2\pi ab,$$

此时外接椭圆是

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 - 2a^2kxy + a^2y^2 = 2a^2b^2.$$