

向量

BY ZHCOSIN

目录

1 为什么写这篇文章，从向量与有向线段的关系谈起	1
2 从代数角度重建向量理论	1
2.1 向量概念及其运算	1
2.2 线性相关与线性无关	3
2.3 n 维向量空间	3

1 为什么写这篇文章，从向量与有向线段的关系谈起

最近群里谈论起向量与有向线段的关系，说有题目中有选项说向量就是有向线段，我一向对于这种没什么意义的题目没什么好感，这个问题如果不深究则罢，要深究起来还是有一大堆道理可讲的。

向量与有向线段到底什么关系，其实就是模型与实例的关系，向量是从物理上的力、位移、速度等物理量中抽象出来的一个数学模型，力、位移、速度都是这个模型的实例，而有向线段，则是向量模型在数学上的一个实例。

为什么会有人问向量是不是就是有向线段，而没有人问向量是否就是速度呢？向量这个模型是从一些具体实例中把共同属性抽象出来得到的，在力、位移、速度、有向线段这些实例中，把共同属性大小和方向给抽象出来了，除了这些共同属性以外，每个实例还有一些自身的独有属性，这些属性不是所有向量都有的，例如力有重力弹力摩擦力之分，速度有瞬时速度与平均速度的概念，所以一般也没人把向量跟速度等同起来。那么有向线段呢，有向线段是最纯的向量，纯到什么程度呢，它除了向量属性以外就剩下个几何图形了，所以它是向量的实例中，独有属性最少的，因而用它表示向量最合适不过了，而且中学教材中讲向量，几乎从头到尾就是在拿有向线段在比划，这更让人觉得向量跟有向线段是一回事。

所以总结一下，向量是个数学模型，而有向线段跟力、位移、速度一样，是它的实例，不过有向线段本身也是另一种数学模型，三角函数线就是有向线段这种模型的一个实例，同样，力也是一个物理模型，重力、弹力、摩擦力都是它的实例，所以一个事物到底是模型还是实例，是有相对性，得看在什么场合下说。

向量跟有向线段的区别说清楚了，那么问题就来了，向量是否必须借助于有向线段才能讲清楚，不借助有向线段这种几何工具能否重新建立向量理论，这就是本文接下来的任务：从代数角度重建向量理论。

2 从代数角度重建向量理论

2.1 向量概念及其运算

定义 1. 称 n 元有序数组 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 是一个 n 维向量，其中 $a_i \in R$ ，称 a_i 是这向量的第 i 个分量。称向量 $(0, 0, \dots, 0)$ 为 n 维零向量，记作 0 。

向量用粗体字母表示，如 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, 等。

本文只讨论有限维向量，至于无限维向量 $(a_1, a_2, \dots)$ 也是可以研究的，但是它的一些性质超出中学数学范围，例如内积就是一个无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ ，所以本文不加以讨论。

定义 2. 设向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 称量 $\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ 为这向量的模, 记作 $|\mathbf{a}|$. 模长为 1 的向量称为单位向量.

定义 3. 如果两个 n 维向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 与 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 满足 $a_i = b_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 则称这两个向量相等, 记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

定义 4. 设有两个 n 维向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 与 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 称向量 $\mathbf{c} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ 是这两个向量的和向量, 记作 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, 这就是向量的加法.

由定义可知, 向量加法满足交换律、结合律, 并且可以很自然的推广到多个向量相加.

定义 5. 设有 n 维向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, λ 是一个实数, 称向量 $(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$ 是实数 λ 与向量 $\mathbf{a}$ 的乘积, 记作 $\lambda \mathbf{a}$. 并称 $(-1)\mathbf{a}$ 是 $\mathbf{a}$ 的相反向量, 并简记为 $-\mathbf{a}$.

可以验证, 数乘向量与向量的加法满足以下运算律:

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} \\ (\lambda + \mu)\mathbf{a} &= \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a} \\ (\lambda \mu)\mathbf{a} &= \lambda(\mu \mathbf{a})\end{aligned}$$

定义 6. 向量的减法定义为 $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

显然, 若 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 则 $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$.

向量的模满足三角不等式

定理 7. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$

证明. 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 则只需证(闵可夫斯基不等式)

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

我们使用数学归纳法. $n = 1$ 时不等式显然是成立的, 假定不等式对于小于等于 n 的情形都成立, 那么在 $n + 1$ 的情形, 就有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} (a_i + b_i)^2 &\leq (a_{n+1} + b_{n+1})^2 + \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n+1} b_i^2 + 2a_{n+1}b_{n+1} + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n+1} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n+1} b_i^2} \\ &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} b_i^2} \right)^2\end{aligned}$$

其中第二行到第三行是利用了不等式 $(ax + by) \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$. 这样不等式就对于 $n + 1$ 的情形也成立, 所以得证. $\square$

定义 8. 设有两个 n 维向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 与 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 称数 $\sum_{i=1}^n a_i b_i$ 是这两个向量的内积, 也称数量积, 记作 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 或者 $\mathbf{a} \mathbf{b}$.

注意两个向量的数量积不再是向量, 而是一个数, 所以被称为数量积.

可以验证有以下运算律

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \end{aligned}$$

向量的内积与模满足如下定理

定理 9. $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$

证明. 只需证明不等式 (柯西不等式)

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

就可以了, 这由恒等式

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

立得. □

有了这个定理, 我们就可以引入向量的夹角概念.

定义 10. 称量 $\theta = \arccos \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$ 为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角, 它的范围是 $[0, \pi]$. 如果两个向量的夹角是 $\frac{\pi}{2}$, 则称这两个向量正交, 如果夹角为 θ , 则称两个向量同向, 夹角为 π , 称两个向量反向, 同向与反向都统称两个向量共线, 规定零向量与任意向量共线.

显然, 两个非零向量正交的充分必要条件是 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$.

定理 11. 两个 n 维非零向量共线的充分必要条件是, 存在一个实数 λ , 使得 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$ 成立.

证明. 共线就意味着夹角为 0 或者 π , 即 $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$, 即在柯西不等式中取了等号, 从前面的证明过程中可以看到, 取等号的充分必要条件是两个向量的分量对应成比例, 即存在实数 λ , 使得 $a_i = \lambda b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 成立, 即 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$. □

定义 12. 如果一个向量组中的任意两个向量都正交, 则称这个向量组为正交向量组.

2.2 线性相关与线性无关

这一部分其实是高等代数的内容.

定义 13. 设有向量 $\mathbf{a}$ 与一组向量 $\mathbf{b}_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 如果有一组实数 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 使得 $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{b}_i$ 成立, 则称向量 $\mathbf{a}$ 可以经由向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ 线性表出, 也称向量 $\mathbf{a}$ 是向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ 的一个线性组合.

定义 14. 设有 n 个向量 $\mathbf{a}_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 如果存在一组不全为零的实数 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 使得 $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$, 则称这 n 个向量是线性相关的, 反之, 如果不存在这样的一组实数使得那等式成立, 则称这 n 个向量是线性无关的, 这时也称这组向量是个线性无关向量组.

显然, 若干个向量线性相关的充分必要条件是, 其中存在某个向量可以经由其它向量线性表出. 而且, 如果一组向量是线性相关的, 再把新的向量加入其中, 构成的新向量组仍然是线性相关的, 只要把新向量的系数取为零就可以了.

由定义, 设 $\mathbf{a}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是一个线性无关向量组, 如果有一组实数 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 使得 $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$, 则必有 $\lambda_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$. 而且容易证明, 线性无关向量组的子向量组也是线性无关的, 这与线性相关向量组引入新向量后仍然是线性相关是道理相同的.

例 15. 对于 n 维向量来说, 显然任意一个 n 维向量都可以经由向量组 $\mathbf{a}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{a}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{a}_n = (0, 0, \dots, 1)$ 线性表出, 实际上, 设向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 则 $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{a}_i$. 而且向量组 $\mathbf{a}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是一个线性无关向量组.

线性相关这个概念, 是从向量的共线与共面等概念中抽象出来的。

2.3 n 维向量空间

定义 16. 由数域 P 上的全体 n 维向量所组合的集合, 以及这集合上定义的向量运算一起构成数域 P 上的 n 维向量空间。

向量空间就是一种代数结构, 所谓代数结构, 简单的说就是集合加上元素间的运算。

定理 17. n 维向量空间中, 线性无关向量组的最大向量个数是 n . 或者说, n 维向量空间中的任意 $n+1$ 个向量, 一定是线性相关的。

证明. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ 是 n 维向量空间中的一个向量组, 考虑方程

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i = 0$$

设 $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, 上式即线性方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_n a_{n1} + \lambda_{n+1} a_{n+1,1} = 0 \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_n a_{n2} + \lambda_{n+1} a_{n+1,2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_n a_{nn} + \lambda_{n+1} a_{n+1,n} = 0 \end{cases}$$

未知数个数多于方程的个数, 因此方程一定有非零解, 所以得证. $\square$

由这定理立即可得

定理 18. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 n 维向量空间中的一个线性无关向量组, 那么该空间中的任一向量都可以经由这个向量组线性表出。

现在我们可以引入基和坐标的概念了. 这其实是线性空间的概念, 不过在向量的加法与数量乘法定义下, 向量空间就成为线性空间的一个实例了。

定义 19. 称 n 维向量空间中的一个包含 n 个向量的线性无关组 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 为该空间的一组基底向量组, 简称基. 对于空间中任一向量 a , 若它经由这组基的分解式为 $a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, 则称 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 a 在这组基下的坐标。

定义 20. 设 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 是 n 维向量空间的一组基, 如果它们两两正交, 则称它是正交基。

定义 21. 如果一组正交基的每个向量都是单位向量, 则称它是标准正交基。

显然, 向量 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 本身就是它在基 $\epsilon_1 = (1, 0, \dots, 0), \epsilon_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \epsilon_n = (0, 0, \dots, 1)$ 下的坐标. 平面直角坐标系和空间直角坐标系的基就是标准正交基, 而斜坐标系不是正交基。

设 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ 是 n 维向量空间的一组标准正交基, 则显然有

$$\epsilon_i^2 = 1 (i = 1, 2, \dots, n), \quad \epsilon_i \epsilon_j = 0 (i \neq j)$$

再设向量 a 在这个标准正交基下的坐标是 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 即 $a = \sum_{i=1}^n x_i \epsilon_i$, 则有

$$a \cdot \epsilon_j = \epsilon_j \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \epsilon_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i (\epsilon_i \epsilon_j) = x_j (\epsilon_j \epsilon_j) = x_j$$

因而有如下公式

$$a = \sum_{i=1}^n (a \cdot \epsilon_i) \epsilon_i$$

需要注意的是这公式的前提是在标准正交基下。

设 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 和 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 n 维向量空间的两组基, 并且前一组基在后一组基下的坐标是

$$\begin{cases} e_1 = x_{11}\varepsilon_1 + x_{12}\varepsilon_2 + \dots + x_{1n}\varepsilon_n \\ e_2 = x_{21}\varepsilon_1 + x_{22}\varepsilon_2 + \dots + x_{2n}\varepsilon_n \\ \dots\dots\dots \\ e_n = x_{n1}\varepsilon_1 + x_{n2}\varepsilon_2 + \dots + x_{nn}\varepsilon_n \end{cases}$$

那么如果向量 a 在基 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 下的坐标是 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, 则它在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标显然是

$$a = \sum_{i=1}^n a_i e_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i x_{ij} \varepsilon_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_i x_{ij} \right) \varepsilon_j$$

用 $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ 表示向量 a 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的新坐标, 那么上式即是

$$(a'_1, a'_2, \dots, a'_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

还记得转轴公式吗, 就是这里的特例.

定义 22. 在上述情况下, 称矩阵 $(x_{ij})_{n \times n}$ 为由基 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 到另一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 的过渡矩阵. 向量的坐标在不同的基下的坐标, 按照上述转换公式进行变换, 就称为坐标变换.