凹数列的反向柯西不等式

牟晓生
(哈佛大学, xiaoshengmu@fas.harvard.edu)

1. 问题背景

设 $f(x), g(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的非负函数, 那么我们有连续形式的柯西不等式:

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \le \left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

类似地, 如果 $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是两个非负数列, 则有:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

反向柯西不等式的研究试图在一定条件下给出与上面反向的不等式, 即左边大于等于右边的常数倍. 这方面的第一个结果由 Polya 和 Szego 得到:

定理 1 (Polya-Szego, 1925) 如果 $f(x) \in [a, A]$, $g(x) \in [b, B]$, 则有:

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \ge \frac{2\sqrt{abAB}}{ab+AB} \cdot \left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

这个不等式的离散形式也成立.

我们知道柯西不等式在 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 为常数时取等号. 由于限制 $f(x)$, $g(x)$ 的大小也就限制了它们比值的取值范围, 这样上面的结果就很好理解了. 同样地, 通过假设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是凹函数也能起到限制 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的效果, 从而得到下面的结论:

定理 2 (Gruss '35, Bellman '56, Barnes '69, Borell '73) 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是 $[0,1]$ 区间上非负的凹函数, 则有:

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \ge \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

注意到这里的常数 $\frac{1}{2}$ 是最优的, 在 $f(x) = x, g(x) = 1 - x$ 时取等号.

本文考虑定理 2 的离散形式. 我们将证明:

定理 3 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ $(n \geq 2)$ 是两个非负的凹数列, 即对每个 $2 \leq i \leq n-1$ 有 $2a_i \geq a_{i-1} + a_{i+1}$, $2b_i \geq b_{i-1} + b_{i+1}$. 则有:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \frac{n-2}{2n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

等号在 $a_i = i-1, b_i = n-i$ 时取到.

据笔者所知, 定理 3 在现有文献中仍是一个猜想. Barnes 曾在论文中指出他关于定理 2 的方法不适用于一般离散的情况, 而只能解决两个数列均单调的特殊情况. 下一节我们先给出那个问题的简洁证明.

2. 单调情形的简洁证明

这一节我们假设两个数列都是单调数列, 在此附加条件下证明定理 3. 由于可以将一个数列中的每一项乘上常数而不改变问题条件与结论, 我们不妨假设 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i = \frac{n(n-1)}{2}$. 此时有如下引理:

引理 4 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是一个单调的非负凹数列, 且满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(n-1)}{2}$. 则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}. \tag{2}$$

证明 不妨设 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. 由 Karamata 不等式, 只需证明对每个 $1 \leq k \leq n-1$ 有

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i \leq \sum_{i=k+1}^{n} (i-1).$$

注意到对每个 $1 \leq j \leq k < i \leq n$, 由凹数列性质有

$$a_j \geq \frac{j-1}{i-1} \cdot a_i + \frac{i-j}{i-1} \cdot a_1 \geq \frac{j-1}{i-1} \cdot a_i.$$

重写为 $\frac{i-1}{j-1} \cdot a_j \geq a_i$, 对 i 求和得到

$$\frac{\sum_{i=k+1}^{n}(i-1)}{j-1} \cdot a_j \geq \sum_{i=k+1}^{n} a_i, \ \forall 1 \leq j \leq k.$$

如果 $\sum\limits_{i=k+1}^{n} a_i > \sum\limits_{i=k+1}^{n} (i-1)$, 那么由上面的不等式可知 $a_j > j-1$, $\forall 1 \leq j \leq k$. 这样导致所有 a_i 的和大于 $\sum\limits_{i=1}^{n}(i-1)$, 与引理条件矛盾. 于是引理得证! □

回到定理 3 的证明. 我们知道 (1) 式右边至多是 $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. 另一方面,

$$2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

$$\geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\right)^2-\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}$$
$$=n(n-1)^2-\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3}.$$

这样就证明了 (1) 式. □

如果引理 4 的结论对一般凹数列也成立, 那么用同样的证明即可得到完整的定理 3. 很遗憾, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$ 的最大值并不在 $a_i=i-1$ (或 $a_i=n-i$) 时取到. 我们有下面的结论:

引理 5 (Khintchine) 设 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ $(n\geq 3)$ 是一个非负凹数列, 且满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i=\frac{n(n-1)}{2}$. 则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{n(i-1)}{n-2}\right)^2=\frac{n^2(n-1)(2n-3)}{6(n-2)}. \tag{3}$$

证明 我们采取一个间接的策略, 假设 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$ 取到最大值, 从而导出数列的一些性质以便最后直接验证 (3) 式. 这个方法之后还会用到.

在所有满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i=\frac{n(n-1)}{2}$ 的非负凹数列中取一个使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$ 最大. 由紧集和连续函数的性质, 最大值是取到的.

我们首先证明至多存在一个 j $(2\leq j\leq n-1)$, 使得 $2a_j>a_{j-1}+a_{j+1}$.

假设不然, 则存在 $1<j_1<j_2<n$ 使得

$$2a_{j_1}>a_{j_1-1}+a_{j_1+1} \quad 且 \quad 2a_{j_2}>a_{j_2-1}+a_{j_2+1}.$$

考虑一个辅助数列 $\{\delta_i\}_{i=1}^{n}$: 当 $1\leq i\leq j_1$ 时 $\delta_i=i-1$; 当 $j_2\leq i\leq n$ 时 $\delta_i=\lambda(i-n)$ (其中 λ 是待定的正数); 当 $j_1<i<j_2$ 时 $\delta_i=\frac{j_2-i}{j_2-j_1}\cdot\delta_{j_1}+\frac{i-j_1}{j_2-j_1}\cdot\delta_{j_2}$. 从几何角度来说, n 个点 (i,δ_i) 连接成三个线段, 而拐点恰好出现在 $i=j_1,j_2$.

易知存在唯一的 λ 使得 $\sum\limits_{i}\delta_i=0$. 这时考虑两个数列 $a_i'=a_i+\epsilon\cdot\delta_i$ 以及 $a_i''=a_i-\epsilon\cdot\delta_i$, 它们的和都等于 $\frac{n(n-1)}{2}$. 注意到数列 $\{a_i\}$ 是凹的, 并且在 $i=j_1,j_2$ 处是严格凹的. 而数列 $\pm\{\delta_i\}$ 在 $i\neq j_1,j_2$ 处是线性的, 所以对充分小的正数 ϵ, 数列 $\{a_i'\}$, $\{a_i''\}$ 都是凹的. 又由于 $\delta_1=\delta_n=0$, $a_1'=a_1''=a_1, a_n'=a_n''=a_n$ 都是非负的. 由凹数列的性质, $\{a_i'\}$ 与 $\{a_i''\}$ 都是非负的. 故 $\{a_i'\}$, $\{a_i''\}$ 都是符合条件的数列, 但是

$$\sum_i a_i'^2+\sum_i a_i''^2-2\sum_i a_i^2=2\epsilon^2\sum_i \delta_i^2>0,$$

与 $\sum\limits_{i} a_i^2$ 的最大性相矛盾!

所以我们证明了存在 k ($1 \le k \le n$), 使得 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 是等差数列, 而 $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ 也是等差数列. 如果 $k=1$ 或 $k=n$, 那么 $\{a_i\}$ 是单调的.

考虑辅助数列 $\delta_i = i - \frac{n+1}{2}$. 如果 $a_1, a_n > 0$, 则 $\{a_i \pm \epsilon\delta_i\}$ 都是非负的凹数列, 且其中一个的平方和比 $\{a_i\}$ 大. 所以只可能 $a_1 = 0$ 或者 $a_n = 0$, 再由 $\sum\limits_i a_i = \frac{n(n-1)}{2}$ 可知 $a_i = i-1$ 或者 $a_i = n-i$.

这样我们再次得到引理 4 的结论, 即当 $\{a_i\}$ 单调时 $\sum\limits_i a_i^2$ 的最大值是 $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} < \frac{n^2(n-1)(2n-3)}{6(n-2)}$.

接下来假设 $1 < k < n$, 我们证明 $a_1 = a_n = 0$. 如果 $a_1 > 0$, 考虑下面的辅助数列 δ_i: 当 $k \le i \le n$ 时 $\delta_i = n-i$; 当 $1 \le i < k$ 时 $\delta_i = n-k-\lambda(k-i)$. 取唯一的 λ 使得 $\sum\limits_i \delta_i = 0$, 那么和上面一样可以证明 $\{a_i \pm \epsilon\delta_i\}$ 都是和为 $\frac{n(n-1)}{2}$ 的非负凹数列. 这与 $\sum\limits_i a_i^2$ 最大相矛盾!

所以存在 $1 < k < n$ 使得

$$a_i = \frac{i-1}{k-1} \cdot a_k,\ 1 \le i \le k, \quad \text{以及} \quad a_i = \frac{n-i}{n-k} \cdot a_k,\ k < i \le n.$$

利用 $\sum\limits_i a_i = \frac{n(n-1)}{2}$ 可知 $a_k = n$, 于是可以直接求出

$$\sum_i a_i^2 = n^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} (\frac{i-1}{k-1})^2 + \sum_{i=k+1}^{n} (\frac{n-i}{n-k})^2 \right) = \frac{n^2}{6} \cdot (2n-2+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{n-k}).$$

由于 $\frac{1}{x}$ 是凸函数, 容易看出上面最右边的式子在 $k=2$ 或 $k=n-1$ 时最大. 最大值是 $\frac{n^2}{6} \cdot (2n-2+1+\frac{1}{n-2}) = \frac{n^2}{6} \cdot \frac{(n-1)(2n-3)}{n-2}$, 于是引理得证! □

3. 一般数列的证明

这一节我们证明定理 3 对一般的非负凹数列 $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ 都成立.

不妨假设 $\sum\limits_i a_i = \sum\limits_i b_i = \frac{n(n-1)}{2}$. 只需证明在这些条件下有

$$\sum_i a_i b_i \ge \frac{n-2}{2n-1} \sum_i a_i^2. \tag{4}$$

如果 (4) 式成立, 那么对称地有

$$\sum_i a_i b_i \ge \frac{n-2}{2n-1} \sum_i b_i^2,$$

于是 (1) 式一定成立.

为证 (4) 式, 用上一节的调整法可知只需考虑三种情况:

(i) $a_i = i-1$, $1 \le i \le n$,

(ii) $a_i = n-i$, $1 \le i \le n$ 或者

(iii) 存在 $1<k<n$ 使得 $a_i=\frac{i-1}{k-1}\cdot n, 1\le i\le k$, 以及 $a_i=\frac{n-i}{n-k}\cdot n, k<i\le n$.

先考虑前两种(对称的)情况, 此时只要证明

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)b_i\ge\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

由于左边是 b_i 的线性和, 我们可以再用调整法使得数列 $\{b_i\}$ 也属于上面三种情况之一, 详见角注. [1]

如果 $b_i=i-1$, $\sum_i a_ib_i=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. 如果 $b_i=n-i$, $\sum_i a_ib_i=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. 最后假设数列 $\{b_i\}$ 属于情况(iii), 此时我们将 $2\sum_i a_ib_i\ge\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$ 改写为

$$\sum_i(a_i+b_i)^2\ge\sum_i a_i^2+\sum_i b_i^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3},$$

也就是

$$\begin{aligned}\sum_i(a_i+b_i-n+1)^2&\ge\sum_i a_i^2+\sum_i b_i^2-\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}\\&=\sum_i b_i^2-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.\end{aligned}\tag{5}$$

由于 $a_1=b_1=0$, (5) 式左边至少是 $(n-1)^2$. 而由引理 5, (5) 式右边至多是

$$\frac{n^2(n-1)(2n-3)}{6(n-2)}-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{n(n-1)^2}{3(n-2)}\le(n-1)^2.$$

故定理成立.

最后假设 $\{a_i\}$ 属于情况(iii). 由引理 5 知 (4) 式的右边至多是 $\frac{n^2(n-1)(2n-3)}{6(2n-1)}$. 于是只要证明 $2\sum_i a_ib_i\ge\frac{n^2(n-1)(2n-3)}{3(2n-1)}$, 即

$$\sum_i(a_i+b_i-n)^2\ge\sum_i a_i^2+\sum_i b_i^2+\frac{n^2(n-1)(2n-3)}{3(2n-1)}-n^2(n-2).\tag{6}$$

如果 $\{b_i\}$ 属于情况 (iii), 那么 $a_1=b_1=a_n=b_n=0$. 此时 (6) 式左边至少是 $2n^2$. 而由引理 (5) 可知 (6) 式右边至多是

$$\frac{n^2(n-1)(2n-3)}{3(n-2)}+\frac{n^2(n-1)(2n-3)}{3(2n-1)}-n^2(n-2)=n^2\cdot\frac{2n^2-4n+1}{(n-2)(2n-1)}\le 2n^2.$$

---

[1] 具体来说, 我们可以取数列 $\{b_i\}$ 使得 $\sum_i a_ib_i$ 最大, 并在此条件下要求满足 $2b_j>b_{j-1}+b_{j+1}$ 的下标 j 最少(称这样的下标为"拐点"). 如果还有多个数列则尽量要求 b_1, b_n 等于零. 同引理 5 的证明, 至多有一个下标 j 使得 $2b_j>b_{j-1}+b_{j+1}$. 否则 $\{b_i\pm\epsilon\delta_i\}$ 也符合条件, 并且 $\sum_i a_i(b_i+\epsilon\delta_i)+\sum_i a_i(b_i-\epsilon\delta_i)=2\sum_i a_ib_i$ (辅助数列 δ_i 同引理 5 的证明). 那样由最大性得到 $\sum_i a_i(b_i\pm\epsilon\delta_i)=\sum_i a_ib_i$. 然而通过取适当的 ϵ 可以使得 $\{b_i\pm\epsilon\delta_i\}$ 中的一个数列比 $\{b_i\}$ 少一个拐点, 与我们选取 $\{b_i\}$ 的方法矛盾! 于是 $\{b_i\}$ 要么是单调的, 要么只有一个拐点. 如果单调, 我们可以用同样方法进一步证明 $b_1=0$ 或者 $b_n=0$, 于是 $b_i=i-1$ 或者 $b_i=n-i$. 如果 $2b_k>b_{k-1}+b_{k+1}$ 是一个拐点, 则可以证明 $b_1=b_n=0$. 否则对适当的 ϵ, 数列 $\{b_i\pm\epsilon\delta_i\}$ 也达到最大值, 并且要么少一个拐点, 要么在 b_1, b_n 处多一个零.

如果 $\{b_i\}$ 属于情况 (i) 或 (ii), 那么 (6) 式左边至少是 n^2. 而由引理 4 和引理 5 可知 (6) 式右边至多是

$$
\begin{aligned}
&\frac{n^2(n-1)(2n-3)}{6(n-2)}+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+\frac{n^2(n-1)(2n-3)}{3(2n-1)}-n^2(n-2)\\
=&n^2-\frac{n(n-1)(2n^2-6n+1)}{3(n-2)(2n-1)}\leq n^2.
\end{aligned}
$$

故无论如何 (6) 式都成立, 我们也就完成了定理 3 的证明! □