

利用阶与半阶解数论问题

田开斌 褚小光 潘成华

(文武光华数学工作室, 310000)

中图分类号: O156.1 文献标识码: A 文章编号: 1005-6416(2014)05-0002-05

(本讲适合高中)

费马小定理和欧拉定理是数论中非常重要的两个定理,是解决整除问题和同余问题的有力武器.同时,与这两个定理相关的阶与半阶,在解决某些问题时也有着强大的功能.本文简要介绍阶与半阶的概念,并通过几道例题,讲述其应用.

1 基础知识

(1) 欧拉函数

对于任意正整数 m , $\varphi(m)$ 表示不大于 m 且与 m 互素的正整数的个数.

设 m 的标准分解式为

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

$$\text{则 } \varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

(2) 欧拉定理

若 $(a, m) = 1$, 则 $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

(3) 费马小定理

若 p 为素数, 且 $(a, p) = 1$, 则

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

(4) 阶数与原根

当 $(a, m) = 1$ 时, 则存在最小的正整数 λ 使得

$$a^\lambda \equiv 1 \pmod{m},$$

称 λ 为 a 关于 m 的阶数.

显然, $\lambda \leq \varphi(m)$.

若 $\lambda = \varphi(m)$, 则称 a 为 m 的原根.

阶数的性质:

(i) $1, a, a^2, \dots, a^{\lambda-1}$ 中的任何两个数对 m 不同余;

$$(ii) a^t \equiv 1 \pmod{m} \Leftrightarrow \lambda | t;$$

$$(iii) \lambda | \varphi(m);$$

(iv) 若 a 为 m 的原根, 则 $1, a, a^2, \dots, a^{\lambda-1}$ 构成模 m 的一组简系.

(5) 半阶

当 $m \geq 3, (a, m) = 1$ 时, 若存在正整数 x 使得 $a^x \equiv -1 \pmod{m}$,

则将满足该式的最小正整数 τ 称为 a 关于 m 的半阶.

需要注意的是半阶不一定均存在. 例如, 2 关于模 15 的半阶就不存在.

半阶的性质:

(i) 设 $m \geq 3, (a, m) = 1$, 若 a 关于模 m 的阶为 λ , 半阶为 τ , 则 $\lambda = 2\tau$;

(ii) 设 $m \geq 3, (a, m) = 1$, a 关于模 m 的半阶为 τ , 若正整数 t 使得 $a^t \equiv -1 \pmod{m}$, 则 t 为 τ 的奇数倍.

2 例题选讲

例1 设 $m \in \mathbb{Z}_+$. 若 $(2^{m+1} + 1) | (3^{2^m} + 1)$, 证明: $2^{m+1} + 1$ 是素数.^[2]

(2003, 韩国数学奥林匹克)

证明 根据条件知

$$3^{2^m} \equiv -1 \pmod{2^{m+1} + 1}.$$

$$\text{所以, } 3^{2^{m+1}} \equiv 1 \pmod{2^{m+1} + 1}.$$

设 3 关于模 $2^{m+1} + 1$ 的阶数为 λ .

则 $\lambda | 2^{m+1}$, 且 $\lambda | \varphi(2^{m+1} + 1)$.

若 $\lambda = 2^k (k \leq m)$, 则

$$3^{2^m} = (3^{2^k})^{2^{m-k}} \equiv 1 \pmod{2^{m+1} + 1}.$$

这与 $3^{2^m} \equiv -1 \pmod{2^{m+1} + 1}$ 矛盾.

所以, $\lambda = 2^{m+1}$.

故 $2^{m+1} | \varphi(2^{m+1} + 1)$.

若 $2^{m+1} + 1$ 不是素数, 设 p 为其任意一个素因子. 易知,

$$\varphi(2^{m+1} + 1) \leq (2^{m+1} + 1) \left(1 - \frac{1}{p}\right) < 2^{m+1}.$$

这与 $2^{m+1} \mid \varphi(2^{m+1} + 1)$ 矛盾.

因此, $2^{m+1} + 1$ 为素数.

例2 求所有的整数 m, n 使得

$$mn \mid (3^m + 1), mn \mid (3^n + 1). \quad [3]$$

(2005, 韩国数学奥林匹克)

解 分两种情形讨论.

(1) m, n 中有一个为1.

不妨设 $m=1$. 则 $mn=n, 3^m+1=4$.

从而, $n \mid 4 \Rightarrow n=1, 2$ 或 4 .

经检验, 知 $(m, n) = (1, 1), (1, 2)$ 满足题设条件.

对称地, 此时方程的解为

$$(m, n) = (1, 1), (1, 2), (2, 1).$$

(2) $m \geq 2, n \geq 2$.

若 m, n 同为偶数, 则 $4 \mid (3^m + 1)$.

而 $3^m + 1 \equiv (-1)^m + 1 \equiv 2 \pmod{4}$, 故

$$4 \nmid (3^m + 1).$$

矛盾.

于是, m, n 中至少有一个为奇数, 不妨设 m 为奇数.

设 p 为 m 的最小素因子.

注意到, $3 \nmid (3^m + 1)$. 所以, $p \geq 5$.

而 $mn \mid (3^m + 1) \Rightarrow p \mid (3^m + 1)$

$$\Rightarrow 3^m \equiv -1 \pmod{p} \Rightarrow 3^{2m} \equiv 1 \pmod{p}.$$

又根据费马小定理知

$$3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

设3关于 p 的阶为 λ . 则

$$3^\lambda \equiv 1 \pmod{p}, \lambda \mid 2m, \lambda \mid (p-1), \lambda \nmid m.$$

注意到, p 为 m 的最小素因子.

$$\text{所以, } (m, p-1) = 1.$$

$$\text{从而, } (2m, p-1) = 2.$$

$$\text{于是, } \lambda \mid 2 \Rightarrow \lambda = 2.$$

因此, $3^2 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow p \mid 8$, 这与 $p \geq 5$ 为素数矛盾.

综上, 满足条件的

$$(m, n) = (1, 1), (1, 2), (2, 1).$$

例3 求所有的正整数 n 使得 $n^2 \mid (2^n + 1)$.

(第31届IMO)

解 先用数学归纳法证明一个引理.

引理 若 $3 \parallel (a+1)$, 则对任意的 $k \in \mathbb{N}$,

$$3^{k+1} \parallel (a^{3^k} + 1).$$

证明: 当 $k=0$ 时, 根据条件, 结论显然成立.

假设当 $k=t$ 时, 有 $3^{t+1} \parallel (a^{3^t} + 1)$.

则当 $k=t+1$ 时,

$$a^{3^{t+1}} + 1 = (a^{3^t} + 1)^3 - 3a^{3^t}(a^{3^t} + 1).$$

根据归纳假设知

$$3^{3(t+1)} \mid (a^{3^t} + 1)^3, 3^{t+2} \parallel 3a^{3^t}(a^{3^t} + 1).$$

$$\text{所以, } 3^{t+2} \parallel (a^{3^{t+1}} + 1).$$

回到原题.

当 $n=1$ 时, 显然满足题设条件.

下面假设 $n > 1$.

因为 $2^n + 1$ 为奇数, 且 $n^2 \mid (2^n + 1)$, 所以, n 为奇数.

于是, $(2, n) = 1$.

设 n 的最小素因子为 p . 则

$$p \mid (2^n + 1) \Rightarrow 2^n \equiv -1 \pmod{p}.$$

设2关于模 p 的半阶为 τ . 则 $\tau \mid n$.

又根据费马小定理知

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$\Rightarrow 2\tau \mid (p-1) \Rightarrow \tau \mid (p-1, n).$$

注意到, p 为 n 的最小素因子.

$$\text{故 } (p-1, n) = 1 \Rightarrow \tau = 1$$

$$\Rightarrow 2 \equiv -1 \pmod{p} \Rightarrow p = 3.$$

设 $n = 3^\alpha m (\alpha \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{Z}_+, (m, 6) = 1)$.

因为 $n^2 \mid (2^n + 1)$, 所以,

$$3^{2\alpha} \mid (2^{3^\alpha m} + 1) \Rightarrow 3^{2\alpha} \mid [(2^m)^{3^\alpha} + 1].$$

另一方面, 因为2关于模3的半阶为1, 关于模9的半阶为3, 而 $(m, 6) = 1$, 所以,

$$3 \parallel (2^m + 1).$$

$$\text{由引理知 } 3^{\alpha+1} \parallel (2^{3^\alpha m} + 1).$$

综合两方面知

$$2\alpha \leq \alpha + 1 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\Rightarrow n = 3m, \text{ 其中, } m \in \mathbb{Z}_+, (m, 6) = 1.$$

若 $m=1$, 则 $n=3$, 满足题设条件.

若 $m > 1$, 设 m 的最小素因子为 q , 则 $q \geq 5$.

$$\text{故 } q^2 \mid (2^{3m} + 1) \Rightarrow 8^m \equiv -1 \pmod{q}.$$

设8关于 q 的半阶为 τ_1 . 则 $\tau_1 \mid m$.

又根据费马小定理知

$$8^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}.$$

所以, $2\tau_1 \mid (q-1) \Rightarrow \tau_1 \mid (m, q-1)$.

注意到, q 为 m 的最小素因子.

从而, $(m, q-1) = 1$.

故 $\tau_1 = 1$.

因此, $8 \equiv -1 \pmod{q} \Rightarrow q = 3$.

这与 $q \geq 5$ 矛盾.

综上, 满足条件的解只有 $n = 1, 3$.

例 4 确定所有的正整数对 (n, p) 满足: p 为素数, $n \leq 2p$, 且 $n^{p-1} \mid [(p-1)^n + 1]$.

(第 40 届 IMO)

解 (1) 当 $n = 1$ 时, 显然, 任意素数 p 满足题设条件.

(2) 当 $n = 2$ 时, 因为 $n^{p-1} \mid [(p-1)^n + 1]$, 所以, $(p-1)^n + 1$ 为偶数.

进而, p 为偶数, 只能 $p = 2$.

经检验, $(n, p) = (2, 2)$ 满足题设条件.

(3) 当 $n \geq 3$ 时, 显然, $p \geq 3$.

此时, $(p-1)^n + 1$ 为奇数.

所以, n 为奇数.

设 n 的最小素因子为 q . 则

$$(p-1)^n \equiv -1 \pmod{q}.$$

设 $p-1$ 关于模 q 的半阶为 τ . 则 $\tau \mid n$, 且 $p-1$ 关于模 q 的阶为 2τ .

又 $\varphi(q) = q-1$, 则

$$2\tau \mid (q-1) \Rightarrow \tau \mid (q-1).$$

于是, $\tau \mid (n, q-1)$.

注意到, q 为 n 的最小素因子.

于是, $(n, q-1) = 1$.

从而, $\tau = 1$.

$$\text{故 } p-1 \equiv -1 \pmod{q} \Rightarrow q \mid p \Rightarrow q = p$$

$\Rightarrow p$ 为 n 的最小素因子.

又因为 $n \leq 2p$, 所以, 只能 $n = p$.

于是, $p^{p-1} \mid [(p-1)^p + 1]$.

由二项式定理得

$$\begin{aligned} (p-1)^p + 1 &= p^p - C_p^1 p^{p-1} + C_p^2 p^{p-2} - C_p^3 p^{p-3} + \cdots + C_p^{p-1} p - 1 + 1 \\ &= p^2 (p^{p-2} - C_p^1 p^{p-3} + C_p^2 p^{p-4} - C_p^3 p^{p-5} + \cdots \\ &\quad - C_p^{p-2} + 1). \end{aligned}$$

显然, $p^2 \mid [(p-1)^p + 1]$, 且

$$p^3 \nmid [(p-1)^p + 1].$$

所以, $p-1 \leq 2$, 即得 $p = 3$.

综上, 所有的解为

$(n, p) = (2, 2), (3, 3), (1, p)$ (p 为任意

素数).

例 5 求所有的正整数 $n > 1$, 使得存在唯一的整数 a 满足 $0 \leq a < n!$, 且 $n! \mid (a^n + 1)$.

(第 46 届 IMO 预选题)

解 分类讨论.

(1) 当 $a = 2$ 时, 仅有 $a = 1$ 满足条件.

所以, $n = 2$ 满足题设条件.

(2) 当 $n > 2$, 且 n 为偶数时, 显然, $4 \mid n!$.

而 $a^n + 1 \equiv (a^2)^{\frac{n}{2}} + 1 \equiv 1$ 或 $2 \pmod{4}$, 则 $4 \nmid (a^n + 1)$.

此时 n 无解.

(3) 当 n 为奇合数时, 显然,

$$n! \mid [(n! - 1)^n + 1],$$

即 $a = n! - 1$ 满足 $n! \mid (a^n + 1)$.

另一方面, 设 p 为 n 的最小素因子. 则 $p \geq 3$.

$$\text{于是, } p < 2p \leq \frac{2n}{p} \leq \frac{2n}{3} < n.$$

$$\text{故 } p \cdot \frac{2n}{p} \mid (n-1)! \Rightarrow n \mid (n-1)!$$

$$\Rightarrow n! \mid [(n-1)!]^2.$$

又由二项式定理得

$$[(n-1)! - 1]^n$$

$$= \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} C_n^i [(n-1)!]^i$$

$$= [(n-1)!]^n + n \cdot (n-1)! - 1 +$$

$$\sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{n-i} C_n^i [(n-1)!]^i.$$

当 $2 \leq i \leq n-1$ 时, 均有

$$C_n^i [(n-1)!]^i$$

$$= [(n-1)!]^{i-2} \cdot n! \cdot \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-i+1) \cdot (n-1)!}{i!}$$

为 $n!$ 的倍数.

$$\text{故 } [(n-1)! - 1]^n + 1$$

$$\equiv [(n-1)!]^n + n \cdot (n-1)!$$

$$\equiv 0 \pmod{n!}.$$

于是, $a = (n-1)! - 1$ 满足 $n! \mid (a^n + 1)$.

故当 n 为奇合数时, 至少有两个 a 满足条件.

此时 n 无解.

(4) 当 n 为奇素数时, 显然, $a = n! - 1$ 满足

$$n! \mid (a^n + 1).$$

接下来证明: 无其他满足条件的 a .

设 $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} n$ ($p_1 < p_2 < \cdots < p_k < n$, 且均为素数).

若另有 x 使得 $n! \mid (x^n + 1)$, 则

$$x^n \equiv -1 \pmod{p_i^{\alpha_i}} (i=1, 2, \dots, k).$$

设 x 关于模 $p_i^{\alpha_i}$ 的半阶为 τ . 则 $\tau | n$.

又 x 关于模 $p_i^{\alpha_i}$ 的阶为 2τ , 且

$$\varphi(p_i^{\alpha_i}) = p_i^{\alpha_i} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = p_i^{\alpha_i-1}(p_i - 1),$$

$$\text{故 } 2\tau | p_i^{\alpha_i-1}(p_i - 1) \Rightarrow \tau | p_i^{\alpha_i-1}(p_i - 1).$$

而 $(n, p_i^{\alpha_i-1}(p_i - 1)) = 1$, 故只能 $\tau = 1$.

于是, $x \equiv -1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$.

由费马小定理知

$$x^n \equiv x \pmod{n} \Rightarrow x \equiv -1 \pmod{n}$$

$$\Rightarrow x \equiv -1 \pmod{n!}.$$

所以, 只有唯一的 $a = n! - 1$, 满足

$$0 \leq a < n!, \text{ 且 } n! | (a^n + 1).$$

综上, 当且仅当 n 为素数时, 满足要求.

练习题

1. 证明: 对任意的 $n > 1 (n \in \mathbb{Z}_+)$, 均有 $n \nmid (2^n - 1)$.

(第33届美国大学生普特南数学竞赛; 1992, 友谊杯国际数学竞赛)

提示: 若存在 $n > 1 (n \in \mathbb{Z}_+)$, 使得

$$n | (2^n - 1).$$

因为 $2^n - 1$ 为奇数, 所以, n 为奇数.

设 p 为 n 的最小素因子. 则 $2^n \equiv 1 \pmod{p}$.

由费马小定理知 $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

设 2 关于模 p 的阶数为 λ . 则

$$\lambda | n, \lambda | (p - 1) \Rightarrow \lambda | (n, p - 1).$$

而 p 为 n 的最小素因子, 则 $(n, p - 1) = 1$.

故 $\lambda = 1$.

于是, $2 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow p | 1$, 矛盾.

2. 设 q 为费马数 $F_n = 2^{2^n} + 1$ 的素因子. 证明: 当 $n > 1$ 时, 有 $2^{n+2} | (q - 1)$.

提示: 先证明一个引理.

引理 设 v 为大于 1 的正整数, q 为 $v^{2^m} + 1$ 的奇素因子. 则 $2^{m+1} | (q - 1)$.

证明: 根据条件知

$$v^{2^m} \equiv -1 \pmod{q} \Rightarrow v^{2^{m+1}} \equiv 1 \pmod{q}.$$

设 v 关于模 q 的阶数为 λ . 则 $\lambda | 2^{m+1}$.

而 $\lambda \nmid 2^m$, 故 $\lambda = 2^{m+1}$.

再由费马小定理知 $v^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$.

$$\text{所以, } 2^{m+1} | (q - 1).$$

回到原题.

$$\begin{aligned} \text{由 } F_{n-1}^{2^{n+1}} &= [(2^{2^{n-1}} + 1)^2]^{2^n} \equiv (2^{2^{n-1}+1})^{2^n} \\ &= (2^{2^n})^{2^{n-1}} + 1 \equiv (-1)^{2^{n-1}} + 1 \equiv -1 \pmod{F_n}, \end{aligned}$$

知 $q | (F_{n-1}^{2^{n+1}} + 1)$.

根据引理知 $2^{n+2} | (q - 1)$.

3. 试求所有的素数对 (p, q) , 使得 $pq | (p^p + q^q + 1)$.

(2007, 韩国数学奥林匹克)

提示: 若 $p = q$, 则 $p^2 | (2p^p + 1)$. 这不可能.

根据对称性, 不妨设 $p < q$.

由条件知

$$pq | (p^p + q^q + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} p | (q^q + 1), \\ q | (p^p + 1). \end{cases}$$

分情形讨论.

(1) 若 $p = 2$, 则 $q | (2^2 + 1) \Rightarrow q = 5$.

(2) 若 $p \geq 3$, 此时, p, q 均为奇素数.

$$\text{由 } p | (q^q + 1) \Rightarrow q^q \equiv -1 \pmod{p}$$

$$\Rightarrow q^{2q} \equiv 1 \pmod{p}.$$

又由费马小定理知 $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

设 q 关于模 p 的阶为 λ_1 . 则

$$\lambda_1 | 2q, \lambda_1 | (p - 1), \lambda_1 \nmid q.$$

$$\text{所以, } \lambda_1 | (2q, p - 1).$$

注意到, $p < q$.

$$\text{故 } (2q, p - 1) = 2.$$

于是, $\lambda_1 | 2$.

而 $\lambda_1 \nmid q$, 则 $\lambda_1 = 2$.

根据阶数的性质知

$$q^2 \equiv 1 \pmod{p}, q \not\equiv 1 \pmod{p}.$$

$$\text{故 } p | (q^2 - 1) \Rightarrow p | (q + 1)(q - 1)$$

$$\Rightarrow p | (q + 1).$$

因为 $q | (p^p + 1)$, 所以,

$$p^p \equiv -1 \pmod{q} \Rightarrow p^{2p} \equiv 1 \pmod{q},$$

且根据费马小定理知 $p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$.

设 p 关于模 q 的阶为 λ_2 . 则

$$\lambda_2 | 2p, \lambda_2 | (q - 1), \lambda_2 \nmid p.$$

$$\text{所以, } \lambda_2 | (2p, q - 1).$$

注意到, $p | (q + 1)$.

$$\text{故 } q - 1 \equiv -2 \pmod{p}. \text{ 从而, } (2p, q - 1) = 2.$$

于是, $\lambda_2 | 2$.

而 $\lambda_2 \nmid q$, 则 $\lambda_2 = 2$.

根据阶数的性质知

$$p^2 \equiv 1 \pmod{q}, \text{ 且 } p \not\equiv 1 \pmod{q}$$

$$\Rightarrow q | (p^2 - 1) \Rightarrow q | (p + 1)(p - 1)$$

$\Rightarrow q|(p+1)$.

因为 $p < q$, 且 $q|(p+1)$, 所以, 只能 $q = p+1$.

而 p, q 均为奇素数, 这不可能.

综上, 满足条件的素数对

$(p, q) = (2, 5), (5, 2)$.

详解见本刊 2008 年增刊.

4. 求所有的素数对 (p, q) , 使得 $pq|(5^p + 5^q)$.

(2009, 中国数学奥林匹克)

提示: 分情形讨论.

(1) $\min\{p, q\} = 2$.

根据对称性, 不妨设 $p = 2$. 则 $2q|(25 + 5^q)$.

根据费马小定理知 $5^q \equiv 5 \pmod{q}$.

故 $25 + 5^q \equiv 30 \equiv 0 \pmod{q}$

$\Rightarrow q|30 \Rightarrow q = 2, 3$ 或 5 .

经检验, $q = 3, 5$ 满足题设条件.

故当 $\min\{p, q\} = 2$ 时, 满足条件的素数对

$(p, q) = (2, 3), (2, 5), (3, 2), (5, 2)$.

(2) $p \geq 3, q \geq 3$, 且 p, q 中有一个为 5.

根据对称性, 不妨设 $p = 5$. 则

$5q|(5^5 + 5^q) \Rightarrow q|(5^4 + 5^{q-1})$.

当 $q = 5$ 时, 显然满足条件.

当 $q \neq 5$ 时, 由费马小定理知

$5^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$.

则 $5^4 + 5^{q-1} \equiv 5^4 + 1 \equiv 2 \times 313 \pmod{q}$

$\Rightarrow q|2 \times 313 \Rightarrow q = 313$.

故当 $\min\{p, q\} = 5$ 时, 满足条件的素数对

$(p, q) = (5, 5), (5, 313), (313, 5)$.

(3) $p \geq 3, q \geq 3$, 且 $5 \nmid pq$.

则 $pq|(5^p + 5^q) \Rightarrow pq|(5^{p-1} + 5^{q-1})$.

由费马小定理知

$5^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, 5^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$.

所以, $5^{q-1} \equiv -1 \pmod{p}, 5^{p-1} \equiv -1 \pmod{q}$.

设 5 关于模 p, q 的半阶分别为 λ_1, λ_2 . 则 5 关于模 p, q 的阶分别为 $2\lambda_1, 2\lambda_2$.

注意到,

$5^{q-1} \equiv -1 \pmod{p}, 5^{p-1} \equiv -1 \pmod{q}$.

所以, $\frac{q-1}{\lambda_1} \cdot \frac{p-1}{\lambda_2}$ 为奇数. ①

又 $5^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, 5^q \equiv 1 \pmod{q}$, 则

$2\lambda_1|(p-1), 2\lambda_2|(q-1)$.

于是, $4 \mid \frac{p-1}{\lambda_1} \cdot \frac{q-1}{\lambda_2}$.

因为这与结论①矛盾, 所以, 此时无解.

综上, 满足条件的素数对

$(p, q) = (2, 3), (2, 5), (3, 2), (5, 2),$
 $(5, 5), (5, 313), (313, 5)$.

详解见本刊 2009 年增刊.

参考文献:

- [1] 王连笑. 费马小定理与欧拉定理的应用[J]. 中等数学, 2010(11).
- [2] 第 16 届韩国数学奥林匹克(2003)[J]. 中等数学, 2004(增刊).
- [3] 第 18 届韩国数学奥林匹克(2005)[J]. 中等数学, 2006(增刊).

敬告读者

经天津市新闻出版局备案,《中等数学》编辑部今年除推出《2014 全国高中数学联赛模拟题集萃》外,为帮助读者更好地了解世界数学竞赛状况,给数学爱好者提供更丰富、更详尽的世界各国家及地区数学竞赛试题,编辑部将继续出版《2012—2013 国内外数学竞赛题及精解》。2014 年增刊精选了国内外三十多个国家和地区的竞赛试题,并给出详细解答。本增刊资料性强,权威性高,有助于读者拓宽视野,进一步提高自身竞赛水平,适合准备参加全国高中数学联赛的学生及辅导教师阅读。

《2012—2013 国内外数学竞赛题及精解》将于 6 月底出版,定价 38 元。编辑部从即日起接受读者订购。邮购单册 43 元(含邮挂费)。

如需办理快递请与发行部联系。

发行部地址:300074,天津市河西区吴家窑大街 57 号增 1 号

电话:022-23542233 15822631163

本刊编辑部