半内切四边形

何万程

2023 年 3 月 23 日

定义 1. 圆心在一个凸四边形的某边上，并且与其他边所在直线都相切的四边形称为半内切四边形.

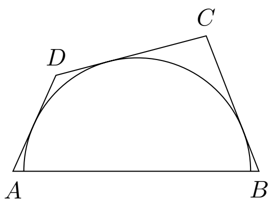

图 1

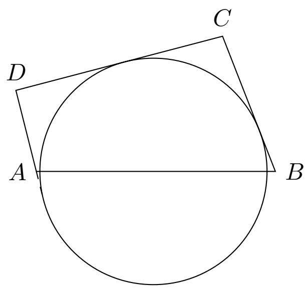

图 2

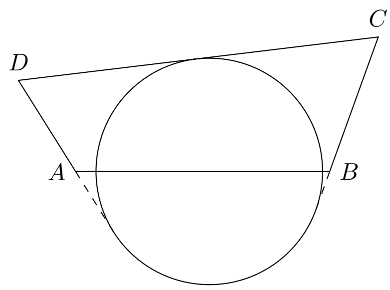

图 3

图 1、图 2 和图 3 的四边形 $ABCD$ 都是半内切四边形的情形.

定理 1. 凸四边形 $ABCD$ 满足 $AB \parallel CD$ 或有外接圆，$\odot O$ 的圆心在凸四边形 $ABCD$ 的边 AB 上，并与其他边所在直线都相切，则 $AB = AD + BC$.

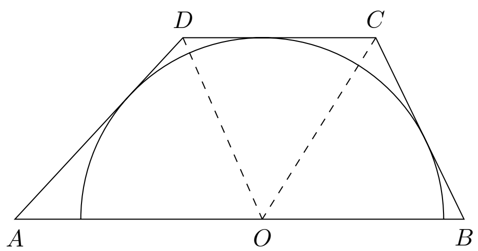

图 4

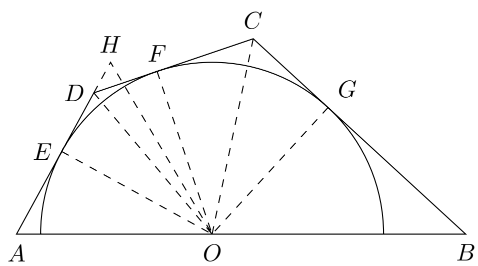

图 5

证明： 如图 4，若 $AB \parallel CD$，连 CO、DO. 因为 $\angle AOD = \angle CDO = \angle ADO$，所以 $AO = AD$. 同理得 $BO = BC$，所以 $AB = AD + BC$.

如图 5，若凸四边形 $ABCD$ 有外接圆，设点 E、F、G 分别是 AD、CD、BC 与 $\odot O$ 的切点，把 $\triangle OFC$ 绕点 O 旋转得 $\triangle OEH$，$\angle EHO = \theta$，则

$$\angle EHO = \angle FCO = \angle OCG = \theta.$$

因为点 A、B、C、D 共圆，所以 $\angle HAO = 180^\circ - 2\theta$，于是

$$\angle AOH = 180^\circ - (\angle AHO + \angle HAO) = \theta = \angle AHO,$$

所以

$$OA = AH = AE + FC = AE + GC.$$

同理得

$$OB = BG + ED,$$

所以

$$AB = OA + OB = AD + BC. \qquad \square$$

定理 2. 凸四边形 $ABCD$ 满足 $AD \parallel BC$，$\odot O$ 的圆心在凸四边形 $ABCD$ 的边 AB 上，并与其他边所在直线都相切，则 $CD = AD + BC$.

证明： 如图 6，设 $\odot O$ 分别与直线 BC、CD、DA 相切于点 T、U、V，则点 T、O、V 共线，连 OT、OU、OV. 因为 $\triangle OBT \cong \triangle OAV$，所以 $BT = AV$，因此 $CD = CU + DU = CT + DV = BC - BT + AD + AV = AD + BC$. $\square$

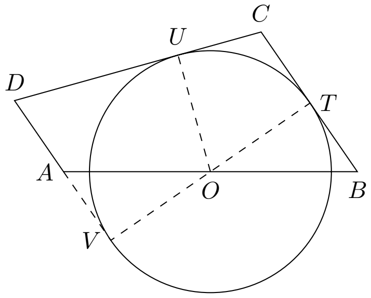

图 6

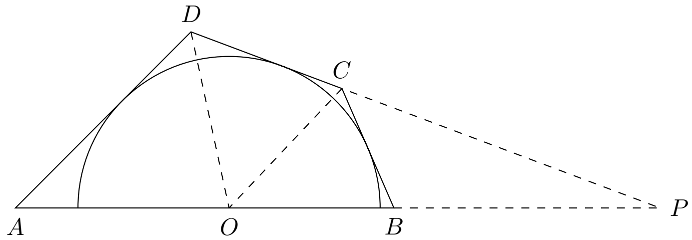

图 7

例 1. 给定四线段 a、b、c、d，求作凸四边形 $ABCD$，使 $AB = a$，$BC = b$，$CD = c$，$DA = d$，有一圆的圆心在凸四边形 $ABCD$ 的边 AB 上，并与其他边所在直线都相切.

解： 定理 1 已给出 $AB \parallel CD$ 的情形，下面只求直线 AB 与直线 CD 相交的情形. 如图 7，不妨设射线 AB 与射线 DC 相交于点 P，$CP = x$，$BP = y$，$BO = z$，则 $AO = a - z$. 连 CO、DO，则 CO 是 $\triangle BCP$ 的外角平分线，DO 是 $\triangle ADP$ 的内角平分线，根据角平分线定理，得

$$\begin{cases} \dfrac{x}{b} = \dfrac{y+z}{z}, \\ \dfrac{c+x}{d} = \dfrac{y+z}{a-z}, \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} y = \dfrac{a(x-b)(x+c)}{(b+d)x+bc}, \\ z = \dfrac{ab(x+c)}{(b+d)x+bc}, \end{cases}$$

再由余弦定理，得

$$\frac{x^2+y^2-b^2}{2xy} = \frac{(x+c)^2+(y+a)^2-d^2}{2(x+c)(y+a)},$$

把上面得到的 y、z 的值代入上方程，得

$$\begin{aligned} &(a+b+d)(a-b-d)(b+d-c)x^2 \\ &+ c(a^2(2b-c) - 2b(b+d)(b+d-c))x + bc^2(a^2 - b(b+d-c)) = 0, \end{aligned}$$

因此分三种情况：

（1）当 $a \neq b+d$ 且 $c \neq b+d$ 时，解这个方程，得

$$x=\frac{-c(a^2(2b-c)-2b(b+d)(b+d-c))\pm ac\sqrt{a^2(c^2-4bd)+4bd((b+d)^2-c^2)}}{2(a+b+d)(a-b-d)(b+d-c)}.$$

（2）当 $a=b+d$ 时，方程变为

$$(d^2-b^2)x=b(b(c+d)+d^2),$$

当 $b\neq d$ 时，解这个方程，得

$$x=\frac{b(b(c+d)+d^2)}{d^2-b^2},$$

经计算角的余弦值可得四边形 $ABCD$ 有外接圆. 当 $b=d$ 时，满足条件的 x 不存在，所以若四边形 $ABCD$ 存在，则必定 $AB \parallel CD$，这个四边形必定是等腰梯形.

（3）当 $c=b+d$ 时，方程变为

$$(d-b)x=bc,$$

当 $b\neq d$ 时，解这个方程，得

$$x=\frac{bc}{d-b},$$

经计算角的余弦值可得 $AD \parallel BC$. 当 $b=d$ 时，满足条件的 x 不存在，所以若四边形 $ABCD$ 存在，则必定 $AB \parallel CD$，再由定理 1 知 $a=b+d$，由此得 $a=c=2b=2d$，这个四边形是平行四边形，此时半内切圆的大小不确定，当四边形 $ABCD$ 是矩形时半内切圆最大，此时半径是 b.

上面的结果若 $x<0$，并且 $x<-c$，则说明 CD 的延长线与 BA 的延长线相交. 根据上面的结果就可以作出这个四边形来.

当 $a=b+d$ 时，这个四边形可以是一个 AB 与 CD 平行的梯形，则作边长为 $a-c$、b、d 的三角形，然后把边 b 向三角形外沿平行于长度是 $a-c$ 的边的方向平移长度 c 就是所求的四边形. □

由定理 1、定理 2 及例 1 中的讨论可得

定理 3. 凸四边形 $ABCD$ 中 $\odot O$ 的圆心在凸四边形 $ABCD$ 的边 AB 上，并与其他边所在直线都相切，则 $AB=AD+BC$ 的充要条件是 $AB \parallel CD$ 或凸四边形 $ABCD$ 有外接圆，$CD=AD+BC$ 的充要条件是 $AD \parallel BC$.

下面来确定这个圆的半径和四边形的面积.

设圆半径是 r，$\odot O$ 分别与直线 BC、CD、DA 相切于点 T、U、V. 若点 T 在线段 BC 内，则有向线段 $\overline{BT}$ 为正；点 T 在线段 BC 外，则有向线段 $\overline{BT}$ 为负. 若点 V 在线段 AD 内，则有向线段 $\overline{AV}$ 为正；点 V 在线段 AD 外，则有向线段 $\overline{AV}$ 为负. 因为

$$r=PO\cdot\sin\angle APD=|y+z|\sqrt{1-\left(\frac{x^2+y^2-b^2}{2xy}\right)^2}. \tag{1}$$

当 $a\neq b+d$ 且 $c\neq b+d$ 时，把上面（1）计算得到的 x 值代入 (1) 并化简，得

$$r=\frac{\sqrt{-(a-b+c-d)(a+b-c+d)\Big(P\pm 2a(b-d)\sqrt{\Delta}\Big)}}{2(b+c+d)|b-c+d|},$$

其中

$$P=(b+c+d)(-b+c+d)(b-c+d)(b+c-d)+a^2(b^2+c^2+d^2-6bd),$$
$$\Delta=a^2(c^2-4bd)+4bd(b+c+d)(b-c+d).$$

此时

$$\begin{aligned}
&AO=\frac{a(c+2d)\mp\sqrt{\varDelta}}{2(b+c+d)},\ BO=\frac{a(2b+c)\pm\sqrt{\varDelta}}{2(b+c+d)}, \\
&\overline{BT}=\frac{b-c+d}{2}+\frac{a(b-d)\pm\sqrt{\varDelta}}{2(b+c+d)(b-c+d)}\cdot a,\ CT=CU=\frac{b+c-d}{2}-\frac{a(b-d)\pm\sqrt{\varDelta}}{2(b+c+d)(b-c+d)}\cdot a, \\
&\overline{AV}=\frac{b-c+d}{2}+\frac{a(-b+d)\mp\sqrt{\varDelta}}{2(b+c+d)(b-c+d)}\cdot a,\ DU=DV=\frac{-b+c+d}{2}-\frac{a(-b+d)\mp\sqrt{\varDelta}}{2(b+c+d)(b-c+d)}\cdot a,
\end{aligned}\tag{2}$$

以上三式的符号对应于上面（1）中 x 的符号.

可以验证，上述公式对 $a=b+d$，但 $c\neq b+d$ 时仍成立.

当 $a=b+d$，$c\neq b+d$ 时，若四边形 $ABCD$ 是梯形时，则 r 就是 AB 与 CD 的距离，所以

$$r=\frac{\sqrt{c(2b-c)(2d-c)(2b+2d-c)}}{2|b+d-c|}.$$

此时

$$\begin{aligned}
&AO=d,\ BO=b, \\
&\overline{BT}=b-\frac{-c+2d}{2(b-c+d)}\cdot c,\ CT=CU=\frac{-c+2d}{2(b-c+d)}\cdot c, \\
&\overline{AV}=d-\frac{2b-c}{2(b-c+d)}\cdot c,\ DU=DV=\frac{2b-c}{2(b-c+d)}\cdot c.
\end{aligned}$$

若四边形 $ABCD$ 内接于圆，则把上面（2）计算得到的 x 值代入 (1) 并化简，得

$$r=\frac{\sqrt{c(2b+c)(2d+c)(2b+2d-c)}}{2(b+d+c)}.$$

此时

$$\begin{aligned}
&AO=\frac{b(c+d)+d^2}{b+c+d},\ BO=\frac{b^2+d(b+c)}{b+c+d}, \\
&\overline{BT}=b-\frac{2b+c}{2(b+c+d)}\cdot c,\ CT=CU=\frac{2b+c}{2(b+c+d)}\cdot c, \\
&\overline{AV}=d-\frac{c+2d}{2(b+c+d)}\cdot c,\ DU=DV=\frac{c+2d}{2(b+c+d)}\cdot c.
\end{aligned}$$

由上面的结果知，此时有外接圆时的 r 总不比梯形的 r 小，且只有在 $b=d$ 时有外接圆时的 r 与梯形的 r 相等.

当 $c=b+d$ 且 $b\neq d$ 时，由上面计算得

$$y=\frac{ab}{d-b},\ z=\frac{a}{2},$$

代入 (1) 并化简，得

$$r=\frac{\sqrt{-(a^2-4b^2)(a^2-4d^2)}}{4|b-d|}.$$

此时

$$\begin{aligned}
&AO=BO=\frac{a}{2}, \\
&\overline{BT}=\frac{a^2-4bd}{4(b-d)},\ CT=CU=\frac{-a^2+4b^2}{2(b-d)},
\end{aligned}$$

$$\overline{AV}=\frac{-a^2+4bd}{4(b-d)},\ DU=DV=\frac{a^2-4d^2}{2(b-d)}.$$

确定了圆的半径，四边形的面积 $ABCD$ 很容易求得，其值就是 $\frac{1}{2}(b+c+d)r$.

定理 4. 凸四边形 $ABCD$ 中 $\odot O$ 的圆心在凸四边形 $ABCD$ 的边 AB 上，并与其他边所在直线都相切，$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，则存在满足 $AO=BO$ 的凸四边形 $ABCD$ 的充要条件是 $a=2\sqrt{bd}$ 或 $c=b+d$.

证明： 设圆半径是 r，$\odot O$ 分别与直线 BC、CD、DA 相切于点 T、U、V. 若点 T 在线段 BC 内，则有向线段 $\overline{BT}$ 为正；点 T 在线段 BC 外，则有向线段 $\overline{BT}$ 为负. 若点 V 在线段 AD 内，则有向线段 $\overline{AV}$ 为正；点 V 在线段 AD 外，则有向线段 $\overline{AV}$ 为负. $\measuredangle$ 表似有向角，$\measuredangle BOT$ 的符号与 $\overline{BT}$ 同号，$\measuredangle AOV$ 的符号与 $\overline{AV}$ 同号.

当 $AO=BO$ 时，则 $|\overline{AV}|=|\overline{BT}|$. 若 $\overline{AV}$ 和 $\overline{BT}$ 同号，设 $\overline{AV}=\overline{BT}=x$，$\alpha=\measuredangle BOT=\measuredangle AOV$，$\beta=\angle COT=\angle COU$，$\gamma=\angle DOU=\angle DOV$，则

$$\alpha+\beta+\gamma=90^\circ,\ \alpha=\arctan\frac{x}{r},\ \beta=\arctan\frac{b-x}{r},\ \gamma=\arctan\frac{d-x}{r},$$

所以

$$\cot(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{r(x^2+r^2-bd)}{(b+d)r^2-(bd+r^2)x+(b+d)x^2-x^3}=0,$$

由此得

$$a=2\sqrt{x^2+r^2}=2\sqrt{bd}.$$

若 $\overline{AV}$ 和 $\overline{BT}$ 异号，则类似定理 2 的证明可知 $AD\parallel BC$，所以 $c=b+d$.

当 $a=2\sqrt{bd}$ 时. 若 AB 与 BD 相交，则由 (2) 可得 $AO=BO=\sqrt{bd}$ 或 $AO=\frac{-b+c+3d}{b+c+d}\sqrt{bd}$，$BO=\frac{3b+c-d}{b+c+d}\sqrt{bd}$；若 $AB\parallel BD$，由定理 1 的证明可知 $AO=d$，$BO=b$，此时若 $b\neq d$，此时不可能使 $AO=BO$，所以必须 $b=d$. 综合上述讨论，至少有一种情况能满足 $AO=BO$.

当 $c=b+d$ 时，类似 $a=2\sqrt{bd}$ 的证明可知必定存在至少一种情况满足 $AO=BO$. $\square$