单形中面的含参不等式

李兴源 lihpb@qq.com

摘　要

本文给出一系列关于n维单形中面的含参几何不等式。

关键词

n维单形，中面，几何不等式

The Parametric Inequalities for the Middle Sections in the N-Simplex

Xingyuan Li, lihpb@qq.com

Abstract

This article presents a series of parametrically geometric inequalities for the Middle Sections in the N-Simplex.

Keywords

N-Simplex, Middle Section, Geometric Inequality

1. 引言

本文约定：n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 的各顶点 $A_i(i=0,1,2,\ldots,n)$ 所对的 $n-1$ 维侧面及其面积为 S_i，S_i 与 S_j 所夹的 $n-1$ 维中面面积为 $M_{ij}(i,j=0,1,2,\ldots,n;i\neq j)$，$S_i$ 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij}，x_0、x_1、x_2、…、x_n 为任意正实数，x 为任意实数，$n\geq 3$。

文[1]给出了以下结论

定理 1 若 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 的全体二面角均小于等于 $\frac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{0\leq i<j\leq n}\frac{M_{ij}^2}{S_i^2+S_j^2}\leq\frac{1}{8}(n+1)^2,\quad \sum_{0\leq i<j\leq n}\frac{S_i^2+S_j^2}{M_{ij}^2}\geq 2n^2,$$

等号成立的充要条件是 $S_0=S_1=S_2=\cdots=S_n$。

本文将给出定理 1 的参数形式。下面先介绍一些引理

引理 1.1 $M_{ij}^2=\dfrac{S_i^2+S_j^2+2S_iS_j\cos\theta_{ij}}{4}$，$0\le i<j\le n$。[1]

引理 1.2 若 $\theta_{ij}\le\dfrac{\pi}{2}$，$0\le i<j\le n$，则

$$\frac{M_{ij}^2}{S_i^2+S_j^2}\le\frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2},$$

等号成立的充要条件是 $S_i=S_j$。

证明： 由引理 1.1 有

$$\frac{M_{ij}^2}{S_i^2+S_j^2}=\frac{S_i^2+S_j^2+2S_iS_j\cos\theta_{ij}}{4(S_i^2+S_j^2)}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{2S_iS_j\cos\theta_{ij}}{S_i^2+S_j^2}\right)\le\frac{1}{4}(1+\cos\theta_{ij})=\frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2}。$$

2. 预备知识

引理 2.1 $\sum\limits_{0\le i<j\le n}x_ix_j\cos\theta_{ij}\le\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n}x_i^2$，[2]

等号成立的充要条件是 $\dfrac{x_0}{S_0}=\dfrac{x_1}{S_1}=\dfrac{x_2}{S_2}=\cdots=\dfrac{x_n}{S_n}$。

引理 2.2 $\sum\limits_{0\le i<j\le n}x_ix_j\cos^2\dfrac{\theta_{ij}}{2}\le\dfrac{1}{4}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}x_i\right)^2$，

等号成立的充要条件是 $\dfrac{x_0}{S_0}=\dfrac{x_1}{S_1}=\dfrac{x_2}{S_2}=\cdots=\dfrac{x_n}{S_n}$。

证明： 由引理 2.1 有

$$\sum_{0\le i<j\le n}x_ix_j\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{0\le i<j\le n}x_ix_j(1+\cos\theta_{ij})\le\frac{1}{2}\sum_{0\le i<j\le n}x_ix_j+\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n}x_i^2=\frac{1}{4}\left(\sum_{i=0}^{n}x_i\right)^2。$$

3. 主要结论

由引理 1.2 和引理 2.2 即可得到

定理 2 若 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 的全体二面角均小于等于 $\dfrac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{0\le i<j\le n}\frac{x_ix_jM_{ij}^2}{S_i^2+S_j^2}\le\frac{1}{8}\left(\sum_{i=0}^{n}x_i\right)^2,$$

等号成立的充要条件是 $x_0=x_1=x_2=\cdots=x_n$ 且 $S_0=S_1=S_2=\cdots=S_n$。

对定理 2 运用 Cauchy 不等式可得

定理 3 若 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 的全体二面角均小于等于 $\dfrac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{0\le i<j\le n}\frac{S_i^2+S_j^2}{x_ix_jM_{ij}^2}\ge\frac{2n^2(n+1)^2}{\left(\sum\limits_{i=0}^{n}x_i\right)^2},$$

等号成立的充要条件是 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 为正则单形且 $x_0=x_1=x_2=\cdots=x_n$。
定理 2 和定理 3 即为定理 1 的参数形式。

定理 4 若 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 的全体二面角均小于等于 $\frac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{0\le i<j\le n} x_ix_jM_{ij} \le \sqrt{\frac{n}{8}\sum_{i=0}^{n} S_i^2\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)},$$

等号成立的充要条件是 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 为正则单形且 $x_0=x_1=x_2=\cdots=x_n$。

证明： 对定理 2 两边乘以 $\sum\limits_{0\le i<j\le n}(S_i^2+S_j^2)$ 再运用 Cauchy 不等式得

$$\Big(\sum_{0\le i<j\le n}\sqrt{x_ix_j}M_{ij}\Big)^2 \le \left(\sum_{0\le i<j\le n}\frac{x_ix_jM_{ij}^2}{S_i^2+S_j^2}\right)\sum_{0\le i<j\le n}(S_i^2+S_j^2) \le \frac{n}{8}\left(\sum_{i=0}^{n}S_i^2\right)\left(\sum_{i=0}^{n}x_i\right)^2,$$

对上式两边开平方并作变换：$x_i \to x_i^2\,(i=0,1,2,\ldots,n)$ 即可证得命题。

4. 相关推论

定理 5 $\sum\limits_{0\le i<j\le n} x_ix_jM_{ij}^2 \le \frac{1}{4}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}x_i\right)\left(\sum\limits_{i=0}^{n}x_iS_i^2\right)$，

等号成立的充要条件是 $x_0=x_1=x_2=\cdots=x_n$。

证明： 由引理 1.1 和引理 2.1 有

$$\sum_{0\le i<j\le n}x_ix_jM_{ij}^2 = \frac{1}{4}\sum_{0\le i<j\le n}x_ix_j(S_i^2+S_j^2)+\frac{1}{2}\sum_{0\le i<j\le n}x_ix_jS_iS_j\cos\theta_{ij}$$
$$\le \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n}x_i\Big(\sum_{j=0}^{n}x_j-x_i\Big)S_i^2+\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n}x_i^2S_i^2=\frac{1}{4}\left(\sum_{i=0}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n}x_iS_i^2\right)。$$

对定理 5 作变换：$x_i \to \frac{x_i}{S_i^x}(i=0,1,2,\ldots,n)$，则有

推论 1.1 $\sum\limits_{0\le i<j\le n}\frac{x_ix_jM_{ij}^2}{S_i^xS_j^x} \le \frac{1}{4}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{x_i}{S_i^x}\right)\left(\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{x_i}{S_i^{x-2}}\right)$，

等号成立的充要条件是 $\frac{x_0}{S_0^x}=\frac{x_1}{S_1^x}=\frac{x_2}{S_2^x}=\cdots=\frac{x_n}{S_n^x}$。

在推论 1.1 中，分别令 $x=1$ 和 $x=2$，则有

推论 1.2 $\sum\limits_{0\le i<j\le n}\frac{x_ix_jM_{ij}^2}{S_iS_j} \le \frac{1}{4}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{x_i}{S_i}\right)\left(\sum\limits_{i=0}^{n}x_iS_i\right)$，

等号成立的充要条件是 $\frac{x_0}{S_0}=\frac{x_1}{S_1}=\frac{x_2}{S_2}=\cdots=\frac{x_n}{S_n}$。

推论 1.3 $\sum\limits_{0\le i<j\le n}\frac{x_ix_jM_{ij}^2}{S_i^2S_j^2} \le \frac{1}{4}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}x_i\right)\left(\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{x_i}{S_i^2}\right)$，

等号成立的充要条件是 $\frac{x_0}{S_0^2}=\frac{x_1}{S_1^2}=\frac{x_2}{S_2^2}=\cdots=\frac{x_n}{S_n^2}$。

推论 2.1 $\sum_{0\le i<j\le n}\frac{x_ix_jM_{ij}}{S_i^xS_j^x}\le\sqrt{\frac{n(n+1)}{8}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x_i^2}{S_i^{2x}}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x_i^2}{S_i^{2x-2}}\right)}$，

等号成立的充要条件是 $\frac{x_0}{S_0^x}=\frac{x_1}{S_1^x}=\frac{x_2}{S_2^x}=\cdots=\frac{x_n}{S_n^x}$ 且 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 的各个中面面积均相等。

证明：对定理 5 作变换：$x_i\to\frac{x_i^2}{S_i^{2x}}(i=0,1,2,...,n)$ 并运用幂平均不等式，则有

$$\left(\frac{\sum_{0\le i<j\le n}\frac{x_ix_jM_{ij}}{S_i^xS_j^x}}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^2\le\frac{\sum_{0\le i<j\le n}\frac{x_i^2x_j^2M_{ij}^2}{S_i^{2x}S_j^{2x}}}{\frac{n(n+1)}{2}}\le\frac{\frac{1}{4}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x_i^2}{S_i^{2x}}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x_i^2}{S_i^{2x-2}}\right)}{\frac{n(n+1)}{2}},$$

对上式进行整理即可证得命题。

在推论 2.1 中，分别令 $x=0$、$x=\frac{1}{2}$、$x=1$，则有

推论 2.2 $\sum_{0\le i<j\le n}x_ix_jM_{ij}\le\sqrt{\frac{n(n+1)}{8}\left(\sum_{i=0}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=0}^{n}x_i^2S_i^2\right)}$，

等号成立的充要条件是 $x_0=x_1=x_2=\cdots=x_n$ 且 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 的各个中面面积均相等。

推论 2.3 $\sum_{0\le i<j\le n}\frac{x_ix_jM_{ij}}{\sqrt{S_iS_j}}\le\sqrt{\frac{n(n+1)}{8}\left(\sum_{i=0}^{n}x_i^2S_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x_i^2}{S_i}\right)}$，

等号成立的充要条件是 $\frac{x_0^2}{S_0}=\frac{x_1^2}{S_1}=\frac{x_2^2}{S_2}=\cdots=\frac{x_n^2}{S_n}$ 且 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 的各个中面面积均相等。

推论 2.4 $\sum_{0\le i<j\le n}\frac{x_ix_jM_{ij}}{S_iS_j}\le\sqrt{\frac{n(n+1)}{8}\left(\sum_{i=0}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x_i^2}{S_i^2}\right)}$，

等号成立的充要条件是 $\frac{x_0}{S_0}=\frac{x_1}{S_1}=\frac{x_2}{S_2}=\cdots=\frac{x_n}{S_n}$ 且 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 的各个中面面积均相等。

参考文献

[1] 胡国华,周永国.关于单形中面的几个不等式[J].湖南理工学院学报(自然科学版),2010,23(03):6-8.

[2] 杨世国,王佳.关于单形二面角平分面面积的一类不等式[J].重庆师范学院学报(自然科学版),1996,(01):47-50.