单形二面角平分面的几何不等式

李兴源 lihpb@qq.com

摘 要

本文给出一系列关于n维单形二面角平分面的几何不等式。

关键词

n维单形，二面角平分面，几何不等式

The Geometric Inequalities about the Bisection Planes for the N-Simplex Dihedral Angle

Xingyuan Li, lihpb@qq.com

Abstract

This article presents a series of geometric inequalities about the bisection planes for the n-simplex dihedral angle.

Keywords

N-Simplex, Dihedral Angular Bisection Plane, Geometric Inequality

1. 引言

本文约定：n 维单形 Ω 的体积为 V，用 $S_i(i=1,2,\ldots,n+1)$ 表示 Ω 的第 i 个 $n-1$ 维侧面及其面积，垂直于底面 S_i 的高为 h_i，P 为 n 维单形 Ω 内任意一点，P 到各侧面 S_i 的距离为 d_i，S_i 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij}，S_i 与 S_j 所夹的二面角平分面的 $n-1$ 维面积为 $T_{ij}(i,j=1,2,\ldots,n+1;i\neq j)$，$x_1$、$x_2$、…、$x_{n+1}$ 为任意正实数，x 为任意实数，$n\geq 3$。

文[1]给出了以下结论

命题 1 $$\prod_{1\leq i<j\leq n+1} T_{ij} \leq \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{\frac{n(n+1)}{4}} \left(\prod_{i=1}^{n+1} S_i\right)^{\frac{n}{2}},$$

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形。

本文将给出一系列关于 $T_{ij}(0\leq i<j\leq n)$ 的几何不等式以及命题 1 的加强形式。下面先介绍一些引理

引理 1.1 $T_{ij}=\dfrac{2S_iS_j}{S_i+S_j}\cos\dfrac{\theta_{ij}}{2}$，$1\le i<j\le n+1$。[1]

对引理 1.1 运用幂平均不等式可得

$$\sqrt{\frac{2}{\dfrac{1}{S_i^2}+\dfrac{1}{S_j^2}}}\cos\frac{\theta_{ij}}{2}\le T_{ij}=\frac{2S_iS_j}{S_i+S_j}\cos\frac{\theta_{ij}}{2}\le\sqrt{S_iS_j}\cos\frac{\theta_{ij}}{2}\le\frac{S_i+S_j}{2}\cos\frac{\theta_{ij}}{2}。$$

由上式可以得到以下引理

引理 1.2.1 $\dfrac{T_{ij}}{S_i}+\dfrac{T_{ij}}{S_j}=2\cos\dfrac{\theta_{ij}}{2}$，$1\le i<j\le n+1$。

引理 1.2.2 $\left(\dfrac{T_{ij}}{S_i}+\dfrac{T_{ij}}{S_j}\right)^2=4\cos^2\dfrac{\theta_{ij}}{2}$，$1\le i<j\le n+1$。

引理 1.3.1 $\dfrac{T_{ij}}{\sqrt{S_iS_j}}\le\cos\dfrac{\theta_{ij}}{2}$，$1\le i<j\le n+1$。

等号成立的充要条件是 $S_i=S_j$。

引理 1.3.2 $\dfrac{T_{ij}^2}{S_iS_j}\le\cos^2\dfrac{\theta_{ij}}{2}$，$1\le i<j\le n+1$。

等号成立的充要条件是 $S_i=S_j$。

引理 1.4.1 $\dfrac{T_{ij}}{S_i+S_j}\le\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\theta_{ij}}{2}$，$1\le i<j\le n+1$。

等号成立的充要条件是 $S_i=S_j$。

引理 1.4.2 $\dfrac{T_{ij}^2}{(S_i+S_j)^2}\le\dfrac{1}{4}\cos^2\dfrac{\theta_{ij}}{2}$，$1\le i<j\le n+1$。

等号成立的充要条件是 $S_i=S_j$。

引理 1.5 $\dfrac{T_{ij}^2}{S_i^2}+\dfrac{T_{ij}^2}{S_j^2}\ge2\cos^2\dfrac{\theta_{ij}}{2}$，$1\le i<j\le n+1$。

等号成立的充要条件是 $S_i=S_j$。

引理 1.6 $V=\dfrac{1}{n}S_ih_i=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n}S_jd_j$，$1\le i\le n+1$。

2. 预备知识

引理 2.1 $\sum\limits_{1\le i<j\le n+1}x_ix_j\cos\theta_{ij}\le\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i^2$，[2]

等号成立的充要条件是 $\dfrac{x_1}{S_1}=\dfrac{x_2}{S_2}=\cdots=\dfrac{x_{n+1}}{S_{n+1}}$。

引理 2.2 $\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j \cos^2\frac{\theta_{ij}}{2} \le \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^2$，

等号成立的充要条件是 $\frac{x_1}{S_1}=\frac{x_2}{S_2}=\cdots=\frac{x_{n+1}}{S_{n+1}}$。

证明：由引理 2.1 有

$$\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j \cos^2\frac{\theta_{ij}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j (1+\cos\theta_{ij}) \le \frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^2。$$

引理 2.3 $\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j \cos\frac{\theta_{ij}}{2} \le \sqrt{\frac{n(n+1)}{8}}\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$，

等号成立的充要条件是所有的 $x_i x_j \cos\frac{\theta_{ij}}{2} (1\le i<j\le n+1)$ 均相等且 $\frac{x_1^2}{S_1}=\frac{x_2^2}{S_2}=\cdots=\frac{x_{n+1}^2}{S_{n+1}}$。

证明：对定理引理 2.2 作变换：$x_i \to x_i^2 (i=1,2,\dots,n+1)$ 并运用幂平均不等式，则有

$$\left(\frac{\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j \cos\frac{\theta_{ij}}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^2 \le \frac{\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i^2 x_j^2 \cos^2\frac{\theta_{ij}}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} \le \frac{\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2\right)^2}{\frac{n(n+1)}{2}},$$

对上式进行整理即可证得命题。

设 n 维单形 Ω 的内心为 I，内切球半径为 r，n 维单形 Ω' 为 n 维单形 Ω 的切点单形，Ω' 的重心为 G'，$l=IG'$，则有

引理 3.1 $\sum_{1\le i<j\le n+1} \cos^2\frac{\theta_{ij}}{2} = \frac{(r^2-l^2)(n+1)^2}{4r^2}$。[3]

对引理 3.1 运用幂平均不等式分别可得

引理 3.2 $\sum_{1\le i<j\le n+1} \cos\frac{\theta_{ij}}{2} \le \sqrt{\frac{n(n+1)^3(r^2-l^2)}{8r^2}}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形。

引理 3.3 $\prod_{1\le i<j\le n+1} \cos\frac{\theta_{ij}}{2} \le \left[\frac{(r^2-l^2)(n+1)}{2nr^2}\right]^{\frac{n(n+1)}{4}}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形。

3. 主要结论

由引理 1.3.2 和引理 2.2 可得

定理 1.1 $\sum_{1\le i<j\le n+1} \frac{x_i x_j T_{ij}^2}{S_i S_j} \le \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^2$，

等号成立的充要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$ 且 $S_1=S_2=\cdots=S_{n+1}$。

对定理 1.1 作变换：$x_i \to x_i S_i^{x+1} (i=1,2,\dots,n+1)$，则有

推论 1.1 $\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j S_i^x S_j^x T_{ij}^2 \le \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i S_i^{x+1}\right)^2$，

等号成立的充要条件是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$ 且 $S_1 = S_2 = \cdots = S_{n+1}$。

在推论 1.1 中，分别令 $x = 0$ 和 $x = -2$，则有

推论 1.1.1 $\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j T_{ij}^2 \le \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i S_i\right)^2$，

等号成立的充要条件是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$ 且 $S_1 = S_2 = \cdots = S_{n+1}$。

推论 1.1.2 $\sum_{1\le i<j\le n+1} \frac{x_i x_j T_{ij}^2}{S_i^2 S_j^2} \le \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{S_i}\right)^2$，

等号成立的充要条件是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$ 且 $S_1 = S_2 = \cdots = S_{n+1}$。

对推论 1.1.1 作变换：$x_i \to x_i h_i (i = 1,2,...,n+1)$，再由引理 1.6 可得

推论 1.2 $\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j h_i h_j T_{ij}^2 \le \frac{n^2V^2}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^2$，

等号成立的充要条件是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$ 且 $h_1 = h_2 = \cdots = h_{n+1}$。

对推论 1.2 作变换：$x_i \to x_i h_i^{x-1} (i = 1,2,...,n+1)$，则有

推论 1.2.1 $\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j h_i^x h_j^x T_{ij}^2 \le \frac{n^2V^2}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i h_i^{x-1}\right)^2$，

等号成立的充要条件是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$ 且 $h_1 = h_2 = \cdots = h_{n+1}$。

在推论 1.2.1 中，令 $x = -(n-1)$，则有

推论 1.2.2 $\sum_{1\le i<j\le n+1} \frac{x_i x_j T_{ij}^2}{h_i^{n-1} h_j^{n-1}} \le \frac{n^2V^2}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{h_i^n}\right)^2$，

等号成立的充要条件是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$ 且 $h_1 = h_2 = \cdots = h_{n+1}$。

在推论 1.1.1 中，令 $x_i = d_i (i = 1,2,...,n+1)$，再由引理 1.6 可得

推论 1.3 $\sum_{1\le i<j\le n+1} d_i d_j T_{ij}^2 \le \frac{n^2V^2}{4}$，

等号成立的充要条件是 P 与 n 维单形 Ω 的内心、重心三点重合。
对定理 1.1 运用 Cauchy 不等式可得

推论 1.4 $\sum_{1\le i<j\le n+1} \frac{S_i S_j}{x_i x_j T_{ij}^2} \ge \frac{n^2(n+1)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^2}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$。

对推论 1.4 作变换：$x_i \to x_i S_i^{1-x} (i = 1,2,...,n+1)$，则有

推论 1.5 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{S_i^x S_j^x}{x_i x_j T_{ij}^2}\ge\frac{n^2(n+1)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i S_i^{1-x}\right)^2}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

在推论 1.5 中，分别令 $x=0$、$x=2$，则有

推论 1.5.1 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{1}{x_i x_j T_{ij}^2}\ge\frac{n^2(n+1)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i S_i\right)^2}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

推论 1.5.2 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{S_i^2 S_j^2}{x_i x_j T_{ij}^2}\ge\frac{n^2(n+1)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{S_i}\right)^2}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

对推论 1.5.1 作变换：$x_i\to x_i h_i(i=1,2,...,n+1)$，再由引理 1.6 可得

推论 1.6.1 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{1}{x_i x_j h_i h_j T_{ij}^2}\ge\frac{(n+1)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^2 V^2}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

对推论 1.6.1 作变换：$x_i\to\frac{x_i}{h_i^{x+1}}(i=1,2,...,n+1)$，则有

推论 1.6.2 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{h_i^x h_j^x}{x_i x_j T_{ij}^2}\ge\frac{(n+1)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{h_i^{x+1}}\right)^2 V^2}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

在推论 1.5.1 中，令 $x_i=d_i(i=1,2,...,n+1)$，再由引理 1.6 可得

推论 1.7 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{1}{d_i d_j T_{ij}^2}\ge\frac{(n+1)^2}{V^2}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 P 是 n 维单形 Ω 的内心。

由引理 1.3.2 和引理 3.1 可得

定理 1.2 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{T_{ij}^2}{S_i S_j}\le\frac{(r^2-l^2)(n+1)^2}{4r^2}$，

等号成立的充要条件是 $S_1=S_2=\cdots=S_{n+1}$。

由引理 1.3.1 和引理 3.3 可得

定理 2.1 $\prod_{1\le i<j\le n+1}T_{ij}\le\left[\frac{(r^2-l^2)(n+1)}{2nr^2}\right]^{\frac{n(n+1)}{4}}\left(\prod_{i=1}^{n+1}S_i\right)^{\frac{n}{2}}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形。
定理 2.1 即为命题 1 的加强形式。
由引理 1.3.1 和引理 2.3 可得

定理 2.2 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{x_i x_j T_{ij}}{\sqrt{S_i S_j}}\le\sqrt{\frac{n(n+1)}{8}}\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

对定理 2.2 作变换：$x_i\to x_i S_i^{x+\frac{1}{2}}(i=1,2,...,n+1)$，则有

推论 2.1 $\sum_{1\le i<j\le n+1}x_i x_j S_i^x S_j^x T_{ij}\le\sqrt{\frac{n(n+1)}{8}}\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2 S_i^{2x+1}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。
在推论 2.1 中，分别令 $x=0$、$x=-1$，则有

推论 2.1.1 $\sum_{1\le i<j\le n+1}x_i x_j T_{ij}\le\sqrt{\frac{n(n+1)}{8}}\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2 S_i$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

推论 2.1.2 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{x_i x_j T_{ij}}{S_i S_j}\le\sqrt{\frac{n(n+1)}{8}}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i^2}{S_i}$,

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。
对推论 2.1.1 作变换：$x_i\to x_i\sqrt{h_i}(i=1,2,...,n+1)$，再由引理 1.6 可得

推论 2.2 $\sum_{1\le i<j\le n+1}x_i x_j\sqrt{h_i h_j}T_{ij}\le\frac{nV}{2}\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

对推论 2.2 作变换：$x_i\to x_i h_i^{x-\frac{1}{2}}(i=1,2,...,n+1)$，则有

推论 2.2.1 $\sum_{1\le i<j\le n+1}x_i x_j h_i^x h_j^x T_{ij}\le\frac{nV}{2}\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2 h_i^{2x-1}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

在推论 2.2.1 中，分别令 $x=1$、$x=-\frac{n-1}{2}$，则有

推论 2.2.2 $\sum_{1\le i<j\le n+1}x_i x_j h_i h_j T_{ij}\le\frac{nV}{2}\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2 h_i$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

推论 2.2.3 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{x_i x_j T_{ij}}{h_i^{\frac{n-1}{2}}h_j^{\frac{n-1}{2}}}\le\frac{nV}{2}\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i^2}{h_i^n}$,

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。
在推论 2.1.1 中，令 $x_i=\sqrt{d_i}(i=1,2,...,n+1)$，再由引理 1.6 可得

推论 2.3 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\sqrt{d_i d_j}T_{ij} \le \frac{nV}{2}\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 P 是 n 维单形 Ω 的内心。
由引理 1.3.1 和引理 3.2 可得

定理 2.3 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{T_{ij}}{\sqrt{S_i S_j}} \le \sqrt{\frac{n(n+1)^3(r^2-l^2)}{8r^2}}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形。
由引理 1.2.2 和引理 3.1 可得

定理 3.1 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\left(\frac{T_{ij}}{S_i}+\frac{T_{ij}}{S_j}\right)^2 = \frac{(r^2-l^2)(n+1)^2}{r^2}$。

由引理 1.2.2 和引理 2.2 可得

定理 3.2 $\sum_{1\le i<j\le n+1}x_i x_j\left(\frac{T_{ij}}{S_i}+\frac{T_{ij}}{S_j}\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^2$，

等号成立的充要条件是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$ 且 $S_1 = S_2 = \cdots = S_{n+1}$。
对定理 3.2 作变换：$x_i \to x_i S_i^2 (i=1,2,...,n+1)$，则有

推论 3.1 $\sum_{1\le i<j\le n+1}x_i x_j T_{ij}^2 (S_i+S_j)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i S_i^2\right)^2$，

等号成立的充要条件是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$ 且 $S_1 = S_2 = \cdots = S_{n+1}$。

对定理 3.2 作变换：$x_i \to \frac{x_i}{h_i^2}(i=1,2,...,n+1)$，再由引理 1.6 可得

推论 3.2.1 $\sum_{1\le i<j\le n+1}x_i x_j\left(\frac{T_{ij}}{h_i}+\frac{T_{ij}}{h_j}\right)^2 \le n^2V^2\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{h_i^2}\right)^2$，

等号成立的充要条件是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$ 且 $h_1 = h_2 = \cdots = h_{n+1}$。
对推论 3.2.1 作变换：$x_i \to x_i h_i^2 (i=1,2,...,n+1)$，则有

推论 3.2.2 $\sum_{1\le i<j\le n+1}x_i x_j T_{ij}^2 (h_i+h_j)^2 \le n^2V^2\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^2$，

等号成立的充要条件是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$ 且 $h_1 = h_2 = \cdots = h_{n+1}$。
推论 3.2.2 是比前面推论 1.2 更强的形式。
对定理 3.1 运用 Cauchy 不等式可得

推论 3.3 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{S_i^2 S_j^2}{T_{ij}^2(S_i+S_j)^2} \ge \frac{n^2r^2}{4(r^2-l^2)}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形。
对定理 3.2 运用 Cauchy 不等式可得

推论 3.4 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{S_i^2S_j^2}{x_ix_jT_{ij}^2(S_i+S_j)^2}\ge\frac{n^2(n+1)^2}{4\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^2}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

由引理 1.2.1 和引理 2.3 可得

定理 4.1 $\sum_{1\le i<j\le n+1}x_ix_j(\frac{T_{ij}}{S_i}+\frac{T_{ij}}{S_j})\le\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

对定理 4.1 作变换：$x_i\to x_iS_i(i=1,2,...,n+1)$，则有

推论 4.1 $\sum_{1\le i<j\le n+1}x_ix_jT_{ij}(S_i+S_j)\le\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2S_i^2$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

对定理 4.1 作变换：$x_i\to\frac{x_i}{h_i}(i=1,2,...,n+1)$，则有

推论 4.2 $\sum_{1\le i<j\le n+1}x_ix_j(\frac{T_{ij}}{h_i}+\frac{T_{ij}}{h_j})\le\sqrt{\frac{n^3(n+1)}{2}}V\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i^2}{h_i^2}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

对推论 4.2 作变换：$x_i\to x_ih_i(i=1,2,...,n+1)$，则有

推论 4.3 $\sum_{1\le i<j\le n+1}x_ix_jT_{ij}(h_i+h_j)\le\sqrt{\frac{n^3(n+1)}{2}}V\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

由引理 1.2.1 和引理 3.2 可得

定理 4.2 $\sum_{1\le i<j\le n+1}(\frac{T_{ij}}{S_i}+\frac{T_{ij}}{S_j})\le\sqrt{\frac{n(n+1)^3(r^2-l^2)}{2r^2}}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形。

由引理 1.4.2 和引理 2.2 可得

定理 5.1 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{x_ix_jT_{ij}^2}{(S_i+S_j)^2}\le\frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^2$，

等号成立的充要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$ 且 $S_1=S_2=\cdots=S_{n+1}$。

对定理 5.1 作变换：$x_i\to\frac{x_i}{h_i^2}(i=1,2,...,n+1)$，再由引理 1.6 可得

推论 5.1.1 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{x_ix_jT_{ij}^2}{(h_i+h_j)^2}\le\frac{n^2V^2}{16}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{h_i^2}\right)^2$，

等号成立的充要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$ 且 $h_1=h_2=\cdots=h_{n+1}$。

对推论 5.1.1 作变换：$x_i\to x_ih_i^2(i=1,2,...,n+1)$，则有

推论 5.1.2 $\sum\limits_{1\le i<j\le n+1}\dfrac{x_ix_jh_i^2h_j^2T_{ij}^2}{(h_i+h_j)^2}\le\dfrac{n^2V^2}{16}\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i\right)^2$，

等号成立的充要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$ 且 $h_1=h_2=\cdots=h_{n+1}$。

对定理 5.1 运用 Cauchy 不等式可得

推论 5.2 $\sum\limits_{1\le i<j\le n+1}\dfrac{(S_i+S_j)^2}{x_ix_jT_{ij}^2}\ge\dfrac{4n^2(n+1)^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i\right)^2}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

同理，分别对推论 5.1.1、推论 5.1.2 运用 Cauchy 不等式可得

推论 5.3.1 $\sum\limits_{1\le i<j\le n+1}\dfrac{(h_i+h_j)^2}{x_ix_jT_{ij}^2}\ge\dfrac{4(n+1)^2}{V^2\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1}\dfrac{x_i}{h_i^2}\right)^2}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

推论 5.3.2 $\sum\limits_{1\le i<j\le n+1}\dfrac{(h_i+h_j)^2}{x_ix_jh_i^2h_j^2T_{ij}^2}\ge\dfrac{4(n+1)^2}{V^2\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i\right)^2}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

由引理 1.4.2 和引理 3.1 可得

定理 5.2 $\sum\limits_{1\le i<j\le n+1}\dfrac{T_{ij}^2}{(S_i+S_j)^2}\le\dfrac{(r^2-l^2)(n+1)^2}{16r^2}$。

等号成立的充要条件是 $S_1=S_2=\cdots=S_{n+1}$。

由引理 1.4.1 和引理 2.3 可得

定理 6.1 $\sum\limits_{1\le i<j\le n+1}\dfrac{x_ix_jT_{ij}}{S_i+S_j}\le\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}\sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i^2$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

对定理 6.1 作变换：$x_i\to\dfrac{x_i}{h_i}(i=1,2,\ldots,n+1)$，则有

推论 6.1 $\sum\limits_{1\le i<j\le n+1}\dfrac{x_ix_jT_{ij}}{h_i+h_j}\le\dfrac{nV}{4}\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}\sum\limits_{i=1}^{n+1}\dfrac{x_i^2}{h_i^2}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

对推论 6.1 作变换：$x_i\to x_ih_i(i=1,2,\ldots,n+1)$，则有

推论 6.2 $\sum\limits_{1\le i<j\le n+1}\dfrac{x_ix_jh_ih_jT_{ij}}{h_i+h_j}\le\dfrac{nV}{4}\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}\sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i^2$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

由引理 1.4.1 和引理 3.2 可得

定理 6.2 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{T_{ij}}{S_i+S_j}\le\frac{1}{4}\sqrt{\frac{n(n+1)^3(r^2-l^2)}{2r^2}}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形。

由引理 1.5 和引理 3.1 可得

定理 7 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\left(\frac{T_{ij}^2}{S_i^2}+\frac{T_{ij}^2}{S_j^2}\right)\ge\frac{(r^2-l^2)(n+1)^2}{2r^2}$。

等号成立的充要条件是 $S_1=S_2=\cdots=S_{n+1}$。

参考文献

[1] 苏化明.关于单形二面角平分面面积的不等式[J].数学杂志,1992,(03):315-318.

[2] 苏化明.预给二面角的单形嵌入 E~n 的充分必要条件的一个应用[J].数学杂志,1987,(01):10-13.

[3] 杨世国,王佳.关于单形二面角平分面面积的一类不等式[J].重庆师范学院学报(自然科学版),1996,(01):47-50.