单形二面角的含参正弦不等式及其代数不等式

李兴源　lihpb@qq.com

摘　要

本文通过构造一类特殊的单形并利用Cayley-Menger行列式将一个关于n维单形二面角的含参正弦不等式改写成代数不等式。

关键词

n维单形，二面角，几何不等式，Cayley-Menger行列式

The Parametrically Sine Inequality and its Algebraic Inequalities for the Dihedral Angles in the N-Simplex

Xingyuan Li, lihpb@qq.com

Abstract

This article rewrites a parametrically sine inequality for the dihedral angles in the n-simplex by constructing a special type of simplex and utilizing Cayley-Menger Determinant.

Keywords

N-Simplex, Dihedral Angle, Geometric Inequality, Cayley-Menger Determinant

1. 引言

本文约定：n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 的体积为V，其外接球半径为R，各顶点 $A_i(i=0,1,2,\ldots,n)$ 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积为S_i， S_i 与 S_j 所交的 $n-2$ 维单形及其体积为 $F_{ij}(i,j=0,1,2,\ldots,n;i\neq j)$， S_i 与 S_j 所夹的二面角为θ_{ij}，各棱长 $A_iA_j=a_{ij}$， x_0、 x_1、 x_2、...、 x_n 为任意正实数， $n\geq 3$。

文[1]给出了以下结论

定理 1　$\displaystyle\sum_{0\leq i<j\leq n} x_ix_j\sin^2\theta_{ij}\leq\frac{n-1}{2n}\left(\sum_{i=0}^{n}x_i\right)^2$，

当 $x_0=x_1=x_2=\cdots=x_n$ 且该单形为正则单形时，上面不等式中的等号成立。

本文会通过构造一类特殊的单形进而将定理 1 改写成对应的代数不等式。

2. 预备知识

引理 1 $V=\dfrac{(n-1)S_iS_j}{nF_{ij}}\sin\theta_{ij}$， $0\le i<j\le n$。[2]

引理 2 $V^2=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n(n!)^2}D(A_0,A_1,A_2,\dots,A_n)$，(1)

其中 $D(A_0,A_1,A_2,\dots,A_n)$ 为 $n+2$ 阶 Cayley-Menger 行列式，即

$$D(A_0,A_1,A_2,\dots,A_n)=\begin{vmatrix}0&1&1&1&\cdots&1\\1&0&a_{01}^2&a_{02}^2&\cdots&a_{0n}^2\\1&a_{01}^2&0&a_{12}^2&\cdots&a_{1n}^2\\1&a_{02}^2&a_{12}^2&0&\cdots&a_{2n}^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&a_{0n}^2&a_{1n}^2&a_{2n}^2&\cdots&0\end{vmatrix}。$$ [3]

以下设 a_0、 a_1、 a_2、...、 $a_n>0$， $n\ge3$。下面开始构造一类特殊的 n 维单形

令 n 维单形 $A_0A_1A_2\dots A_n$ 的各棱长满足 $A_iA_j{}^2=a_{ij}^2=a_i+a_j(i,j=0,1,2,\dots,n;i\ne j)$，则

引理 3 $V^2=\dfrac{1}{(n!)^2}\sum\limits_{i=0}^n a_0\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n=\dfrac{1}{(n!)^2}\left(\prod\limits_{i=0}^n a_i\right)\sum\limits_{i=0}^n\dfrac{1}{a_i}$。

证明： 由引理 2 有

$$D(A_0,A_1,A_2,\dots,A_n)=\begin{vmatrix}0&1&1&1&\cdots&1\\1&0&a_0+a_1&a_0+a_2&\cdots&a_0+a_n\\1&a_0+a_1&0&a_1+a_2&\cdots&a_1+a_n\\1&a_0+a_2&a_1+a_2&0&\cdots&a_2+a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&a_0+a_n&a_1+a_n&a_2+a_n&\cdots&0\end{vmatrix}。$$

对上面行列式作以下变形：

1.将第一行乘以 $-a_i$ 加到第 $i+2$ 行 $(i=0,1,2,\dots,n)$；

2.将第一列乘以 $-a_i$ 加到第 $i+2$ 列 $(i=0,1,2,\dots,n)$；

则

$$D(A_0,A_1,A_2,\dots,A_n)=\begin{vmatrix}0&1&1&1&\cdots&1\\1&-2a_0&0&0&\cdots&0\\1&0&-2a_1&0&\cdots&0\\1&0&0&-2a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&0&\cdots&-2a_n\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}2^n\sum_{i=0}^n a_0\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n。$$

再将上式代入至(1)即可证得命题。

同理可得

引理 4 $S_i^2=\dfrac{1}{[(n-1)!]^2}\left(\prod_{j=0}^{n}a_j\right)\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\dfrac{1}{a_ia_j}$，$0\le i\le n$。

引理 5 $F_{ij}^2=\dfrac{1}{[(n-2)!]^2}\left(\prod_{k=0}^{n}a_k\right)\sum_{\substack{k=0\\ k\neq i,j}}^{n}\dfrac{1}{a_ia_ja_k}$，$0\le i<j\le n$。

3. 主要结论

定理 2
$$\sum_{0\le i<j\le n}\frac{x_ix_j\sum_{\substack{k=0\\ k\neq i,j}}^{n}a_ia_ja_k}{\left(\sum_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n}a_ia_k\right)\left(\sum_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{n}a_ja_k\right)}\le\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{\left(\sum_{i=0}^{n}x_i\right)^2}{\sum_{i=0}^{n}a_i},$$

当 $x_0=x_1=x_2=\cdots=x_n$ 且 $a_0=a_1=a_2=\ldots=a_n$ 时，上面不等式中的等号成立。

证明： 由引理 1 可知定理 1 等价于
$$n^2V^2\sum_{0\le i<j\le n}\frac{x_ix_jF_{ij}^{\ 2}}{(n-1)^2S_i^2S_j^2}\le\frac{n-1}{2n}\left(\sum_{i=0}^{n}x_i\right)^2,$$

将引理 3、引理 4、引理 5 代入到上式，得
$$\left(\prod_{i=0}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\sum_{0\le i<j\le n}\frac{x_ix_j\left(\prod_{k=0}^{n}a_k\right)\left(\sum_{\substack{k=0\\ k\neq i,j}}^{n}\frac{1}{a_ia_ja_k}\right)}{\left(\prod_{k=0}^{n}a_k\right)\left(\sum_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n}\frac{1}{a_ia_k}\right)\left(\prod_{k=0}^{n}a_k\right)\left(\sum_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{n}\frac{1}{a_ja_k}\right)}\le\frac{n-1}{2n}\left(\sum_{i=0}^{n}x_i\right)^2,\quad(2)$$

即
$$\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\sum_{0\le i<j\le n}\frac{x_ix_j\sum_{\substack{k=0\\ k\neq i,j}}^{n}\frac{1}{a_ia_ja_k}}{\left(\sum_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n}\frac{1}{a_ia_k}\right)\left(\sum_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{n}\frac{1}{a_ja_k}\right)}\le\frac{n-1}{2n}\left(\sum_{i=0}^{n}x_i\right)^2,$$

对上式作变换：$a_i\to\dfrac{1}{a_i}(i=0,1,2,\ldots,n)$ 并整理即可证得命题。

事实上，在(2)中，若不消去不等式左边分子与分母中的公因子 $\prod_{i=0}^{n}a_i$，则可直接得到比定理 2 更强的形式。

定理 3 a_0、a_1、a_2、…、a_n 为任意实数，且满足 $a_i+a_j>0(i,j=0,1,2,\ldots,n;i\neq j;n\ge 3)$，则

$$\sum_{0\le i<j\le n}\frac{x_ix_ja_0\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_{j-1}a_{j+1}\cdots a_n\sum\limits_{\substack{k=0\\k\ne i,j}}^{n}\frac{1}{a_k}}{\left(a_0\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n\sum\limits_{\substack{k=0\\k\ne i}}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\left(a_0\cdots a_{j-1}a_{j+1}\cdots a_n\sum\limits_{\substack{k=0\\k\ne j}}^{n}\frac{1}{a_k}\right)}\le\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{\left(\sum\limits_{i=0}^{n}x_i\right)^2}{\sum\limits_{i=0}^{n}a_0\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n},$$

当 $x_0=x_1=x_2=\cdots=x_n$ 且 $a_0=a_1=a_2=...=a_n$ 时，上面不等式中的等号成立。

与定理 2 相比，定理 3 并不需要满足 a_0、a_1、a_2、…、a_n 全为正实数，只需要满足 $a_i+a_j>0$ $(i,j=0,1,2,...,n;i\ne j;n\ge 3)$ 即可(所有变量中最多可以有一个变量为非正实数)。即

当 $a_i>0(i=0,1,2,...,n)$ 时，三角形 $A_iA_jA_k(0\le j<k\le n,j\ne i,k\ne i)$ 为锐角三角形，

当 $a_i=0(i=0,1,2,...,n)$ 时，三角形 $A_iA_jA_k(0\le j<k\le n,j\ne i,k\ne i)$ 为直角三角形，

当 $a_i<0(i=0,1,2,...,n)$ 时，三角形 $A_iA_jA_k(0\le j<k\le n,j\ne i,k\ne i)$ 为钝角三角形。

当 $n=3$ 时，所构造的单形即为垂心四面体。可以推断，当 $n\ge 3$ 时，所构造的单形存在垂心(证明从略)。

通过构造这一类特殊的 n 维单形并利用 Cayley-Menger 行列式计算出该单形的各个几何量并代入到不同的几何不等式中，即可构造出相应的代数不等式。所构造出的代数不等式的强度与被代入的几何不等式相当。

参考文献

[1] 马统一.关于 n 维欧氏空间中 Vasic 的不等式[J].数学通报,1994,(12):30-32.

[2] 苏化明.关于单形二面角平分面面积的不等式[J].数学杂志,1992,(03):315-318.

[3] 林祖成.n 维单形的棱切超球[J].数学的实践与认识,1995,(04):90-93.