单形各棱长和高的参数不等式及其代数不等式

李兴源　lihpb@qq.com

摘　要

本文通过构造一类特殊的单形并利用Cayley-Menger行列式将一个关于n维单形各棱长和高的含参几何不等式改写成代数不等式。

关键词

n维单形，棱长，高，几何不等式，Cayley-Menger行列式

The Parametric Inequality and Algebraic Inequalities for Each Edge and Height in the N-Simplex

Xingyuan Li, lihpb@qq.com

Abstract

This article rewrites a parametrically geometric inequality for each edge and height in the n-simplex into algebraic inequalities by constructing a special type of simplex and utilizing Cayley-Menger Determinant.

Keywords

N-Simplex, Edge, Height, Geometric Inequality, Cayley-Menger Determinant

1. 引言

本文约定：n 维单形 $A_0A_1A_2\ldots A_n$ 的体积为 V，重心为 G，各顶点 $A_i(i=0,1,2,\ldots,n)$ 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积为 S_i，垂直于底面 S_i 的高为 h_i，S_i 的重心为 G_i，中线长 $m_i=A_iG_i$，各棱长 $A_iA_j=a_{ij}(i,j=0,1,2,\ldots,n;i\neq j;a_{ij}=a_{ji})$，$x_0$、$x_1$、$x_2$、…、$x_n$ 为任意正实数，$n\geq 3$。

引理 1　$m_i\geq h_i=\dfrac{nV}{S_i}$，$0\leq i\leq n$。

引理 2　$m_i=\dfrac{1}{n}\sqrt{n\sum\limits_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}a_{ij}^2-\sum\limits_{\substack{0\leq j<k\leq n\\j,k\neq i}}a_{jk}^2}$，$0\leq i\leq n$。[1]

定理 1 $\sum_{i=0}^{n} x_i h_i^2 \le \frac{1}{n^2} \sum_{0\le i<j\le n} \left[(n+1)(x_i+x_j) - \sum_{k=0}^{n} x_k \right] a_{ij}^2$。

等号成立的充要条件是 $x_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 且该单形为正则单形。

证明： 由引理 1、引理 2 有

$$\sum_{i=0}^{n} x_i h_i^2 \le \sum_{i=0}^{n} x_i m_i^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n} x_i \big(n\sum_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n} a_{ij}^2 - \sum_{\substack{0\le j<k\le n\\ j,k\ne i}} a_{jk}^2\big) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n} x_i [(n+1)\sum_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n} a_{ij}^2 - \sum_{0\le j<k\le n} a_{jk}^2]$$

$$= \frac{n+1}{n^2}\sum_{0\le i<j\le n} (x_i+x_j) a_{ij}^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{0\le i<j\le n} a_{ij}^2\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{0\le i<j\le n}\left[(n+1)(x_i+x_j) - \sum_{k=0}^{n} x_k\right] a_{ij}^2。$$

本文会通过构造一类特殊的单形进而将定理 1 改写成对应的代数不等式。

2. 预备知识

引理 3 $V^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n!)^2} D(A_0, A_1, A_2, ..., A_n)$，(1)

其中 $D(A_0, A_1, A_2, ..., A_n)$ 为 $n+2$ 阶 Cayley-Menger 行列式，即

$$D(A_0, A_1, A_2, ..., A_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & a_{01}^2 & a_{02}^2 & \cdots & a_{0n}^2 \\ 1 & a_{01}^2 & 0 & a_{12}^2 & \cdots & a_{1n}^2 \\ 1 & a_{02}^2 & a_{12}^2 & 0 & \cdots & a_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{0n}^2 & a_{1n}^2 & a_{2n}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}。[2]$$

以下设 a_0、a_1、a_2、…、$a_n > 0$，$n \ge 3$。下面开始构造一类特殊的 n 维单形

令 n 维单形 $A_0A_1A_2...A_n$ 的各棱长满足 $A_iA_j^{\ 2} = a_{ij}^2 = a_i + a_j (i, j = 0,1,2,..., n; i \ne j)$，则

引理 4 $V^2 = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{i=0}^{n} a_0 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n = \frac{1}{(n!)^2} \left(\prod_{i=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a_i}\right)$。

证明： 由引理 3 有

$$D(A_0, A_1, A_2, ..., A_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & a_0+a_1 & a_0+a_2 & \cdots & a_0+a_n \\ 1 & a_0+a_1 & 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ 1 & a_0+a_2 & a_1+a_2 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_0+a_n & a_1+a_n & a_2+a_n & \cdots & 0 \end{vmatrix}。$$

对上面行列式作以下变形：

1.将第一行乘以 $-a_i$ 加到第 $i+2$ 行 $(i = 0,1,2,..., n)$；

2.将第一列乘以 $-a_i$ 加到第 $i+2$ 列 $(i = 0,1,2,..., n)$；

则

$$D(A_0,A_1,A_2,\ldots,A_n)=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & -2a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}2^n\sum_{i=0}^{n}a_0\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n。$$

再将上式代入至(1)即可证得命题。

同理可得

引理 5 $S_i^2=\dfrac{1}{[(n-1)!]^2}\left(\prod_{j=0}^{n}a_j\right)\left(\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\dfrac{1}{a_ia_j}\right)$，$0\le i\le n$。

3. 主要结论

定理 2 $\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\right)\sum_{i=0}^{n}\dfrac{x_i}{\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}a_ia_j}\le\dfrac{1}{n^2}\sum_{0\le i<j\le n}\left[(n+1)(x_i+x_j)-\sum_{k=0}^{n}x_k\right](\dfrac{1}{a_i}+\dfrac{1}{a_j})$，

等号成立的充要条件是 $x_0=x_1=x_2=\cdots=x_n$ 且 $a_0=a_1=a_2=\cdots=a_n$。

证明：由引理 1 可知定理 1 等价于

$$n^2V^2\sum_{i=0}^{n}\frac{x_i}{S_i^2}\le\frac{1}{n^2}\sum_{0\le i<j\le n}\left[(n+1)(x_i+x_j)-\sum_{k=0}^{n}x_k\right]a_{ij}^2,$$

将引理 4、引理 5 代入到上式，得

$$\left(\prod_{i=0}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\sum_{i=0}^{n}\frac{x_i}{\left(\prod_{j=0}^{n}a_j\right)\left(\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{a_ia_j}\right)}\le\frac{1}{n^2}\sum_{0\le i<j\le n}\left[(n+1)(x_i+x_j)-\sum_{k=0}^{n}x_k\right](a_i+a_j)，\quad(2)$$

对上式进行整理并作变换：$a_i\to\dfrac{1}{a_i}(i=0,1,2,\ldots,n)$ 即可证得命题。

事实上，在(2)中，若不约去不等式左边的 $\prod_{i=0}^{n}a_i$，则可直接得到比定理 2 更强的形式。

定理 3 a_0、a_1、a_2、...、a_n 为任意实数，且满足 $a_i+a_j>0(i,j=0,1,2,\ldots,n;i\neq j;n\ge 3)$，则

$$\left(\sum_{i=0}^{n}a_0\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n\right)\sum_{i=0}^{n}\frac{x_i}{a_0\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{a_j}}\le\frac{1}{n^2}\sum_{0\le i<j\le n}\left[(n+1)(x_i+x_j)-\sum_{k=0}^{n}x_k\right](a_i+a_j),$$

等号成立的充要条件是 $x_0=x_1=x_2=\cdots=x_n$ 且 $a_0=a_1=a_2=\cdots=a_n$。

与定理 2 相比，定理 3 并不需要满足 a_0、a_1、a_2、...、a_n 全为正实数，只需要满足 $a_i+a_j>0$ $(i,j=0,1,2,\ldots,n;i\neq j;n\ge 3)$ 即可(所有变量中最多可以有一个变量为非正实数)。即

当 $a_i > 0(i = 0,1,2,...,n)$ 时，三角形 $A_iA_jA_k(0 \le j < k \le n, j \ne i, k \ne i)$ 为锐角三角形，

当 $a_i = 0(i = 0,1,2,...,n)$ 时，三角形 $A_iA_jA_k(0 \le j < k \le n, j \ne i, k \ne i)$ 为直角三角形，

当 $a_i < 0(i = 0,1,2,...,n)$ 时，三角形 $A_iA_jA_k(0 \le j < k \le n, j \ne i, k \ne i)$ 为钝角三角形。

当 $n = 3$ 时，所构造的单形即为垂心四面体。可以推断，当 $n \ge 3$ 时，所构造的单形存在垂心(证明从略)。

通过构造这一类特殊的 n 维单形并利用 Cayley-Menger 行列式计算出该单形的各个几何量并代入到不同的几何不等式中，即可构造出相应的代数不等式。所构造出的代数不等式的强度与被代入的几何不等式相当。

参考文献

[1] 苏化明.与单形重心有关的几个几何不等式[J].数学季刊,1989,(01):32-38..

[2] 林祖成.n 维单形的棱切超球[J].数学的实践与认识,1995,(04):90-93.