

单形的二面角k等分面及其性质

李兴源, lihpb@qq.com

摘 要

本文把三角形内角k等分线的概念推广至n维单形的二面角k等分面, 并给出其相关性质。

关键词

n维单形, 三角形内角k等分线, 二面角k等分面

The K-equisectional Planes for the Dihedral Angle in Simplex and its Properties

Xingyuan Li, lihpb@qq.com

Abstract

This article extends the concept about the k-equisectional lines in the triangular inner angle to the k-equisectional planes for the dihedral angle in the n-simplex, and provides its related properties.

Keywords

N-Simplex, K-Equisectional Lines for Triangular Inner Angle, K-Equisectional Planes for Dihedral Angle

1. 引言

定义 T_0 、 T_k 为 n 维单形 Ω 中的任意两个 $n-1$ 维侧面, T_0 与 T_k 所夹的二面角为 θ , T_0 与 T_k 所交的 $n-2$ 维单形为 F , T_1 、 T_2 、...、 T_{k-1} 为 n 维单形 Ω 中过 F 的 $k-1$ 个 $n-1$ 维截面, T_i 与 T_{i+1} 所夹的二面角均为 $\frac{\theta}{k}$ ($0 \leq i \leq k-1, k \geq 2$), 则将 T_1 、 T_2 、...、 T_{k-1} 称作 n 维单形 Ω 中关于 T_0 与 T_k 所夹二面角的 k 等分面。

本文会将文[1]中的所有结论推广至 n 维单形。

2. 预备知识

引理 1 n 维单形 $A_0A_1A_2...A_n$ 的体积为 V , 其任意两顶点 A_i 、 A_j 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积分别为 S_i 、 S_j , S_i 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij} , S_i 与 S_j 所交的 $n-2$ 维单形及其体积为 F_{ij} , $0 \leq i < j \leq n$, 则

$$V = \frac{n-1}{n} \frac{S_i S_j}{F_{ij}} \sin \theta_{ij}。 [2]$$

引理 2 $\frac{\sum_{i=1}^{k-1} \sin ix}{\sin kx} = \frac{1}{2}(\tan \frac{kx}{2} \cot \frac{x}{2} - 1)$, $0 < x < \frac{\pi}{k}$, k 为正整数且 $k \geq 2$ 。[3]

证明 由积化和差公式有

$$\begin{aligned}\sin x \sin \frac{x}{2} &= \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{3x}{2}, \\ \sin 2x \sin \frac{x}{2} &= \frac{1}{2} \cos \frac{3x}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{5x}{2}, \\ &\dots\dots\end{aligned}$$

$$\sin(k-1)x \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cos(k-\frac{3}{2})x - \frac{1}{2} \cos(k-\frac{1}{2})x。$$

将以上 $k-1$ 个等式两边相加再运用和差化积公式即有

$$\sin \frac{x}{2} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \sin ix = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos(k-\frac{1}{2})x = \sin \frac{kx}{2} \sin \frac{(k-1)x}{2},$$

因此

$$\frac{\sum_{i=1}^{k-1} \sin ix}{\sin kx} = \frac{\sin \frac{kx}{2} \sin \frac{(k-1)x}{2}}{\sin kx \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{(k-1)x}{2}}{2 \cos \frac{kx}{2} \sin \frac{x}{2}}。 (1)$$

又

$$\sin \frac{(k-1)x}{2} = \sin \frac{kx}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{kx}{2} \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{kx}{2} \sin \frac{x}{2} (\tan \frac{kx}{2} \cot \frac{x}{2} - 1)。 (2)$$

把(2)代入(1)即可证得命题。

3. 主要结论

定理 1 A_0 、 A_k 为 n 维欧氏空间中的任意两点, 用 F 表示 n 维欧氏空间中的 $n-2$ 维单形及其体积, F 与 A_0A_k 所围的 n 维单形为 Ω , 用 T_0 、 T_k 表示点 A_0 、 A_k 分别与 F 所围的 $n-1$ 维侧面及其体积, T_0 与 T_k 所夹的二面角为 θ , 用 T_1 、 T_2 、...、 T_{k-1} 表示 n 维单形 Ω 关于 T_0 与 T_k 所夹二面角的 $k-1$ 个 k 等分面及其 $n-1$ 维体积, T_i 与 T_{i+1} 所夹的二面角均为 $\frac{\theta}{k}$ ($0 \leq i \leq k-1, k \geq 2$), T_1 、 T_2 、...、 T_{k-1} 在线段 A_0A_k 上的交点依次为 A_1 、 A_2 、...、 A_{k-1} , 则

$$\left(\frac{T_0}{T_k}\right)^{k-1} = \frac{A_0A_1}{A_1A_k} \cdot \frac{A_0A_2}{A_2A_k} \cdot \dots \cdot \frac{A_0A_{k-1}}{A_{k-1}A_k}。$$

证明 设 n 维单形 Ω 的体积为 V , F 与 A_0A_1 所围的 n 维单形体积为 V_1 , 由引理 1 有

$$\frac{A_0A_1}{A_1A_k} = \frac{V_1}{V - V_1} = \frac{\frac{n-1}{n} \cdot \frac{T_0T_1}{F} \cdot \sin \frac{\theta}{k}}{\frac{n-1}{n} \cdot \frac{T_1T_k}{F} \cdot \sin \frac{k-1}{k} \theta} = \frac{T_0 \cdot \sin \frac{\theta}{k}}{T_k \cdot \sin \frac{k-1}{k} \theta};$$

同理

$$\frac{A_0 A_2}{A_2 A_k} = \frac{T_0 \cdot \sin \frac{2\theta}{k}}{T_k \cdot \sin \frac{k-2}{k} \theta},$$

$$\dots\dots$$

$$\frac{A_0 A_{k-1}}{A_{k-1} A_k} = \frac{T_0 \cdot \sin \frac{k-1}{k} \theta}{T_k \cdot \sin \frac{\theta}{k}}.$$

将以上 $k-1$ 个等式两边相乘即可证得命题。

定理 2 T_0 、 T_k 为 n 维单形 Ω 中的任意两个 $n-1$ 维侧面及其体积， T_0 与 T_k 所夹的二面角为 θ ， T_1 、 T_2 、...、 T_{k-1} 为 n 维单形 Ω 关于 T_0 与 T_k 所夹二面角的 $k-1$ 个 k 等分面及其 $n-1$ 维体积， T_i 与 T_{i+1} 所夹的二面角均为 $\frac{\theta}{k}$ ($0 \leq i \leq k-1, k \geq 2$)，则

$$\sum_{i=0}^{k-1} T_i T_{i+1} = T_0 T_k \cdot \frac{\sin \theta}{\sin \frac{\theta}{k}}.$$

证明 设 n 维单形 Ω 的体积为 V ， T_0 与 T_k 所交的 $n-2$ 维单形及其体积为 F ， F 与 $A_i A_{i+1}$ 所围的 n 维单形体积为 V_i ($i=0,1,\dots,k-1$)，则

$$\sum_{i=0}^{k-1} V_i = V.$$

由引理 1 有

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{T_i T_{i+1}}{F} \cdot \sin \frac{\theta}{k} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{T_0 T_k}{F} \cdot \sin \theta.$$

对上式进行整理即可证得命题。

定理 3 T_0 、 T_k 为 n 维单形 Ω 中的任意两个 $n-1$ 维侧面及其体积， T_0 与 T_k 所夹的二面角为 θ ， T_1 、 T_2 、...、 T_{k-1} 为 n 维单形 Ω 关于 T_0 与 T_k 所夹二面角的 $k-1$ 个 k 等分面及其 $n-1$ 维体积， T_i 与 T_{i+1} 所夹的二面角均为 $\frac{\theta}{k}$ ($0 \leq i \leq k-1, k \geq 2$)，则

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{T_i} = \frac{T_0 + T_k}{2T_0 T_k} \left(\tan \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2k} - 1 \right).$$

证明 设 n 维单形 Ω 的体积为 V ， T_0 与 T_k 所交的 $n-2$ 维单形及其体积为 F ，用 $\bar{V}_i$ 与 V'_i 表示 F 分别与 $A_0 A_i$ 、 $A_i A_k$ ($1 \leq i \leq k-1$) 所围的 n 维单形体积，易知

$$\bar{V}_i + V'_i = V,$$

即

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{T_0 T_i}{F} \cdot \sin \frac{i}{k} \theta + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{T_i T_k}{F} \cdot \sin \frac{k-i}{k} \theta = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{T_0 T_k}{F} \cdot \sin \theta,$$

对上式进行整理可得

$$\frac{1}{T_i} = \frac{T_0 \sin \frac{i}{k} \theta + T_k \sin \frac{k-i}{k} \theta}{T_0 T_k \sin \theta},$$

对 i 进行求和可得

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{T_i} = \frac{T_0 + T_k}{T_0 T_k} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \sin \frac{i}{k} \theta}{\sin \theta},$$

再由引理 2 即可证得命题。

参考文献

- [1] 谢峰. 关于三角形中角的 n 等分线的几个命题[J]. 中学数学教学, 1993, 5: 21-23.
- [2] 苏化明. 关于单形二面角平分面面积的不等式[J]. 数学杂志, 1992,3: 315-318.
- [3] 蔡学邕. 两个三角等式的应用与推广[J]. 中学数学教学, 1987,1: 27-28.