

单形的棱长k等分面及其性质

李兴源, lihpb@qq.com

摘 要

本文把单形中面的概念推广至单形的棱长k等分面, 并给出其相关性质。

关键词

n维单形, 中面, 棱长k等分面

The K-Equidistant Sections in Simplex and its Properties

Xingyuan Li, lihpb@qq.com

Abstract

This article extends the concept of middle section in the n-simplex to the k-equidistant sections for its edge length and provides its related properties.

Keywords

N-Simplex, Middle Section, K-Equidistant Sections

1. 引言

定义 在 n 维单形 $A_0A_1A_2\dots A_n$ 中, 任意两顶点 A_i 、 A_j 所对的 $n-1$ 维侧面分别为 S_i 、 S_j , S_i 与 S_j 所交的 $n-2$ 维单形为 F_{ij} ($i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}, i \neq j, F_{ij} = F_{ji}$), P_1 、 P_2 、...、 P_{k-1} 为棱 A_iA_j 上的 $k-1$ 个 k 等分点 ($A_iP_1 = P_1P_2 = \dots = P_{k-1}A_j = \frac{A_iA_j}{k}, k \geq 2$), 用 M_1 、 M_2 、...、 M_{k-1} 表示 P_1 、 P_2 、...、 P_{k-1} 分别与 F_{ij} 所围的 $n-1$ 维截面, 则将 M_1 、 M_2 、...、 M_{k-1} 称作 n 维单形 $A_0A_1A_2\dots A_n$ 关于棱 A_iA_j 的 k 等分面。

2. 预备知识

引理 1 在 n 维单形 $A_0A_1A_2\dots A_n$ 中, 任意两顶点 A_i 、 A_j 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积分别为 S_i 、 S_j , S_i 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij} , i 、 $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ 且 $i \neq j$, $\theta_{ij} = \theta_{ji}$, 则:

$$S_i = \sum_{j=0, j \neq i}^n S_j \cos \theta_{ij} \quad [1]$$

引理 2 n 维单形 $A_0A_1A_2\dots A_n$ 的体积为 V ，其任意两顶点 A_i 、 A_j 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积分别为 S_i 、 S_j ， S_i 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij} ， S_i 与 S_j 所交的 $n-2$ 维单形及其体积为 F_{ij} ， $0 \leq i < j \leq n$ ，则

$$V = \frac{n-1}{n} \frac{S_i S_j}{F_{ij}} \sin \theta_{ij}。^{[2]}$$

引理 3 在 n 维单形 $A_0A_1A_2\dots A_n$ 中，任意两顶点 A_i 、 A_j 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积分别为 S_i 、 S_j ， S_i 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij} ， $0 \leq i < j \leq n$ ，则

$$\sum_{i=0}^n S_i^2 = 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} S_i S_j \cos \theta_{ij}。^{[3]}$$

引理 4 在 n 维单形 $A_0A_1A_2\dots A_n$ 中，任意两顶点 A_i 、 A_j 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积分别为 S_i 、 S_j ， S_i 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij} ， S_i 与 S_j 所交的 $n-2$ 维单形及其体积为 F_{ij} ，点 P 在棱 A_iA_j 上，用 M 表示 P 与 F_{ij} 所围的 $n-1$ 维截面及其体积，设 $\frac{A_iP}{PA_j} = \frac{x}{y}$ ($x, y > 0$)， $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ 且 $i \neq j$ ， $\theta_{ij} = \theta_{ji}$ ， $F_{ij} = F_{ji}$ ，则

$$M^2 = \frac{x^2 S_i^2 + y^2 S_j^2 + 2xy S_i S_j \cos \theta_{ij}}{(x+y)^2}。^{[4]}$$

证明 设截面 M 与侧面 S_k 相交所成的两个二面角分别为 θ_k 与 θ'_k ， $0 \leq k \leq n$ 且 $k \neq i, j$ ，易知 $\theta_k + \theta'_k = \pi$ ；再设 S_i 、 S_j 分别与 M 所夹的内二面角为 α_i 与 α_j ，则 $\alpha_i + \alpha_j = \theta_{ij}$ ；又设 S_i 、 S_j 分别与 P 所围的 n 维单形体积分别为 V_i 、 V_j ，则

$$\frac{V_j}{V_i} = \frac{A_iP}{PA_j} = \frac{x}{y}。$$

由引理 2 有

$$V_i = \frac{n-1}{n} \frac{MS_i}{F_{ij}} \sin \alpha_i, \quad V_j = \frac{n-1}{n} \frac{MS_j}{F_{ij}} \sin \alpha_j,$$

即

$$xS_i \sin \alpha_i - yS_j \sin \alpha_j = 0。^{(1)}$$

由引理 1 可得

$$M = S_i \cos \alpha_i + \frac{y}{x+y} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i, j}}^n S_k \cos \theta_k = S_j \cos \alpha_j + \frac{x}{x+y} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i, j}}^n S_k \cos \theta'_k,$$

注意到 $\theta_k + \theta'_k = \pi$ ，从而对上式整理可得

$$xS_i \cos \alpha_i + yS_j \cos \alpha_j = (x+y)M。^{(2)}$$

又由 $\alpha_i + \alpha_j = \theta_{ij}$ ，则通过(1)² + (2)² 并进行整理即可证得命题。

3. 主要结论

由引理 4 即可得到

定理 1 在 n 维单形 $A_0A_1A_2\dots A_n$ 中，任意两顶点 A_i 、 A_j 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积分别为 S_i 、 S_j ， S_i 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij} ， S_i 与 S_j 所交的 $n-2$ 维单形为 F_{ij} ， P_1 、 P_2 、...、 P_{k-1} 为棱 A_iA_j 上的 $k-1$ 个 k 等分点

$(A_i P_1 = P_1 P_2 = \dots = P_{k-1} A_j = \frac{A_i A_j}{k}, k \geq 2)$, 用 $M_1, M_2, \dots, M_{k-1}$ 表示 $P_1, P_2, \dots, P_{k-1}$ 分别与 F_{ij} 所围的 $n-1$ 维截面及其体积, $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ 且 $i \neq j$, $\theta_{ij} = \theta_{ji}$, $F_{ij} = F_{ji}$, 则

$$M_l^2 = \frac{l^2 S_i^2 + (k-l)^2 S_j^2 + 2(k-l)l S_i S_j \cos \theta_{ij}}{k^2}, \quad 1 \leq l \leq k-1.$$

在定理 1 中, 对 l 进行求和即可得到

定理 2 在 n 维单形 $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$ 中, 任意两顶点 A_i, A_j 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积分别为 S_i, S_j , S_i 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij} , $M_1, M_2, \dots, M_{k-1}$ 为 n 维单形 $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$ 关于棱 $A_i A_j$ 的 k 等分面及其 $n-1$ 维体积, $0 \leq i < j \leq n$, $k \geq 2$, 则

$$\sum_{l=1}^{k-1} M_l^2 = \frac{(k-1)(2k-1)(S_i^2 + S_j^2)}{6k} + \frac{(k-1)(k+1)S_i S_j \cos \theta_{ij}}{3k}.$$

在定理 2 中, 对 i, j 进行求和, 再将引理 3 代入即可得到

定理 3 在 n 维单形 $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$ 中, 任意两顶点 A_i, A_j 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积分别为 S_i, S_j , S_i 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij} , N_{ij} 为 n 维单形 $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$ 关于棱 $A_i A_j$ 的 $k-1$ 个 k 等分面的 $n-1$ 维体积平方和, $0 \leq i < j \leq n$, $k \geq 2$, 则

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} N_{ij} = \frac{[(2k-1)n+k+1](k-1)}{6k} \sum_{i=0}^n S_i^2.$$

参考文献

- [1] 沈文选. 关于单形的几个含参几何不等式(英文)[J]. 数学理论与应用, 2000, 1: 88-94.
- [2] 殷红彩, 张华民. E^n 中 n 维单形二面角的角平分面的性质[J]. 浙江大学学报(理学版), 2012, 1: 18-19, 59.
- [3] 苏化明. 预给二面角的单形嵌入 E^n 的充分必要条件的一个应用[J]. 数学杂志, 1987, 1: 10-13.
- [4] 胡国华, 周永国. 关于单形中面的几个不等式[J]. 湖南理工学院学报(自然科学版), 2010, 3: 6-8.