单形重心与内切球半径的几何不等式及其代数不等式

李兴源　lihpb@qq.com

摘　要

本文通过构造一类特殊的单形并利用Cayley-Menger行列式将一个关于n维单形重心与内切球半径的几何不等式改写成代数不等式。

关键词

n维单形，重心，内切球半径，几何不等式，Cayley-Menger行列式

The Geometric Inequality and Algebraic Inequality for the Inradius and Gravity Center in the N-Simplex

Xingyuan Li, lihpb@qq.com

Abstract

This article rewrites a geometric inequality for the inradius and gravity center in the n-simplex by constructing a special type of simplex and utilizing Cayley-Menger Determinant.

Keywords

N-Simplex, Gravity Center, Inradius, Geometric Inequality, Cayley-Menger Determinant

1. 引言

本文约定：n 维单形 $A_0A_1A_2\ldots A_n$ 的体积为 V，重心为 G，内切球半径为 r，各顶点 $A_i(i=0,1,2,\ldots,n)$ 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积为 S_i，垂直于底面 S_i 的高为 h_i，S_i 的重心为 G_i，$l_i=GA_i$，中线长 $m_i=A_iG_i$，各棱长 $A_iA_j=a_{ij}(i,j=0,1,2,\ldots,n;i\neq j;a_{ij}=a_{ji})$，$n\geq 3$。

文[1]给出了以下结论

定理 1 $\sum_{i=0}^{n}\frac{r}{l_i}\leq\frac{n+1}{n}$。

等号成立的充要条件是该单形为正则单形。
本文会通过构造一类特殊的单形进而将定理 1 改写成对应的代数不等式。

2. 预备知识

引理 1 $\dfrac{1}{r}=\sum_{i=0}^{n}\dfrac{1}{h_i}=\dfrac{1}{nV}\sum_{i=0}^{n}S_i$。[2]

引理 2 $l_i=\dfrac{n}{n+1}m_i$，$0\le i\le n$。

引理 3 $h_i\le m_i$，$0\le i\le n$。

定理 1 的证明： 由引理 1、引理 2、引理 3 有

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{r}{l_i}=\frac{n+1}{n}\sum_{i=0}^{n}\frac{r}{m_i}\le\frac{n+1}{n}\sum_{i=0}^{n}\frac{r}{h_i}=\frac{n+1}{n}。$$

引理 4 $m_i=\dfrac{1}{n}\sqrt{n\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n}a_{ij}^2-\sum\limits_{\substack{0\le j<k\le n\\ j,k\ne i}}a_{jk}^2}$，$l_i=\dfrac{1}{n+1}\sqrt{n\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n}a_{ij}^2-\sum\limits_{\substack{0\le j<k\le n\\ j,k\ne i}}a_{jk}^2}$，$0\le i\le n$。[3]

3. 代数不等式的构造

引理 5 $V^2=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n(n!)^2}D(A_0,A_1,A_2,\ldots,A_n)$，(1)

其中 $D(A_0,A_1,A_2,\ldots,A_n)$ 为 $n+2$ 阶 Cayley-Menger 行列式，即

$$D(A_0,A_1,A_2,\ldots,A_n)=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & a_{01}^2 & a_{02}^2 & \cdots & a_{0n}^2\\ 1 & a_{01}^2 & 0 & a_{12}^2 & \cdots & a_{1n}^2\\ 1 & a_{02}^2 & a_{12}^2 & 0 & \cdots & a_{2n}^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_{0n}^2 & a_{1n}^2 & a_{2n}^2 & \cdots & 0\end{vmatrix}。^{[4]}$$

以下设 a_0、a_1、a_2、…、$a_n>0$，$n\ge 3$。下面开始构造一类特殊的 n 维单形

令 n 维单形 $A_0A_1A_2\ldots A_n$ 的各棱长满足 ${A_iA_j}^2=a_{ij}^2=a_i+a_j(i,j=0,1,2,\ldots,n;i\ne j)$，则

引理 6 $V^2=\dfrac{1}{(n!)^2}\sum_{i=0}^{n}a_0\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n=\dfrac{1}{(n!)^2}\left(\prod_{i=0}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\dfrac{1}{a_i}\right)$。

证明： 由引理 5 有

$$D(A_0,A_1,A_2,\ldots,A_n)=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & a_0+a_1 & a_0+a_2 & \cdots & a_0+a_n\\ 1 & a_0+a_1 & 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n\\ 1 & a_0+a_2 & a_1+a_2 & 0 & \cdots & a_2+a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_0+a_n & a_1+a_n & a_2+a_n & \cdots & 0\end{vmatrix}。$$

对上面行列式作以下变形：

1.将第一行乘以$-a_i$加到第$i+2$行$(i=0,1,2,...,n)$；
2.将第一列乘以$-a_i$加到第$i+2$列$(i=0,1,2,...,n)$；
则

$$D(A_0,A_1,A_2,...,A_n)=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & -2a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}2^n\sum_{i=0}^{n}a_0\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n\text{。}$$

再将上式代入至(1)即可证得命题。
同理可得

引理 7 $S_i^2=\dfrac{1}{[(n-1)!]^2}\left(\prod_{j=0}^{n}a_j\right)\left(\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\dfrac{1}{a_ia_j}\right)$，$0\le i\le n$。

定理 2 $\sqrt{\sum_{i=0}^{n}\dfrac{1}{a_i}}\sum_{i=0}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2a_i+\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}a_j}}\le\dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\sqrt{\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\dfrac{1}{a_ia_j}}$，

等号成立的充要条件是$a_0=a_1=a_2=\cdots=a_n$。
证明：由引理 1、引理 4 可知定理 1 等价于

$$\frac{nV}{\sum_{i=0}^{n}S_i}\sum_{i=0}^{n}\frac{n+1}{\sqrt{n\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}a_{ij}^2-\sum_{\substack{0\le j<k\le n\\ j,k\neq i}}a_{jk}^2}}=\frac{nV}{\sum_{i=0}^{n}S_i}\sum_{i=0}^{n}\frac{n+1}{\sqrt{n\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(a_i+a_j)-\sum_{\substack{0\le j<k\le n\\ j,k\neq i}}(a_j+a_k)}}\le\frac{n+1}{n},$$

即

$$\frac{nV}{\sum_{i=0}^{n}S_i}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2a_i+\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}a_j}}\le\frac{1}{n},$$

将引理 6、引理 7 代入到上式，得

$$\frac{\sqrt{\left(\prod_{i=0}^{n}a_i\right)\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}}}{\sum_{i=0}^{n}\sqrt{\left(\prod_{j=0}^{n}a_j\right)\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{a_ia_j}}}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2a_i+\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}a_j}}\le\frac{1}{n}，\quad(2)$$

对上式进行整理即可证得命题。

事实上，在(2)中，若不消去左边分子与分母根号里面的公因子$\prod_{i=0}^{n}a_i$，则可直接得到比定理 2 更强的形式。

定理 3 a_0、a_1、a_2、...、a_n为任意实数，且满足$a_i+a_j>0(i,j=0,1,2,...,n;i\neq j;n\ge 3)$，则

$$\sqrt{\sum_{i=0}^{n} a_0 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 a_i + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} a_j}} \le \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \sqrt{a_0 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{a_j}},$$

等号成立的充要条件是 $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n$。

与定理 2 相比，定理 3 并不需要满足 a_0、a_1、a_2、…、a_n 全为正实数，只需要满足 $a_i + a_j > 0$ $(i, j = 0,1,2,...,n; i \neq j; n \geq 3)$ 即可(所有变量中最多可以有一个变量为非正实数)。即

当 $a_i > 0 (i = 0,1,2,...,n)$ 时，三角形 $A_i A_j A_k (0 \le j < k \le n, j \neq i, k \neq i)$ 为锐角三角形，

当 $a_i = 0 (i = 0,1,2,...,n)$ 时，三角形 $A_i A_j A_k (0 \le j < k \le n, j \neq i, k \neq i)$ 为直角三角形，

当 $a_i < 0 (i = 0,1,2,...,n)$ 时，三角形 $A_i A_j A_k (0 \le j < k \le n, j \neq i, k \neq i)$ 为钝角三角形。

当 $n = 3$ 时，所构造的单形即为垂心四面体。可以推断，当 $n \geq 3$ 时，所构造的单形存在垂心(证明从略)。

通过构造这一类特殊的 n 维单形并利用 Cayley-Menger 行列式计算出该单形的各个几何量并代入到不同的几何不等式中，即可构造出相应的代数不等式。所构造出的代数不等式的强度与被代入的几何不等式相当。

参考文献

[1] 陈士龙,杨世国.关于 E~n 中 Euler 不等式的两类分割[J].高等数学研究,2008,(04):40-42.

[2] 王卫东,杨晓静.联系 n 维单形的内、傍切球半径的一类关系式[J].湖北民族学院学报(自然科学版),1996,(02):3-4.

[3] 苏化明.与单形重心有关的几个几何不等式[J].数学季刊,1989,(01):32-38..

[4] 林祖成.n 维单形的棱切超球[J].数学的实践与认识,1995,(04):90-93.