反演成等圆

若反演圆圆心到两直线 l_1、l_2 的距离分别是 d_1、d_2，要反演后半径相等可得

$$\frac{1}{d_1}=\frac{1}{d_2},$$

所以 $d_1=d_2$. 由此可知当 $l_1 /\!/ l_2$ 时，反演圆圆心在到与 l_1、l_2 平行且等距离的直线上；当 l_1、l_2 相交时，反演圆圆心在 l_1、l_2 相交成两组对顶角区域的角平分线上.

若反演圆圆心到直线 l 的距离是 d_1，到 $\odot O$ 圆心的距离是 d_2，$\odot O$ 的半径是 r，则

$$\frac{1}{d_1}=\left|\frac{1}{d_2-r}-\frac{1}{d_2+r}\right|,$$

由此得 $2d_1r=d_2^2-r^2$ 或 $2d_1r=r^2-d_2^2$，若反演圆圆心在 $\odot O$ 外则取 $2d_1r=d_2^2-r^2$，若反演圆圆心在 $\odot O$ 内则取 $2d_1r=r^2-d_2^2$. 点 O 到 l 的距离是 a，l 的方程是 $y=0$，则由 $2d_1r=d_2^2-r^2$、$2d_1r=d_2^2-r^2$ 得

$$x^2+(y-a-r)^2=2r(r+a),$$

和

$$x^2+(y-a+r)^2=2r(r-a),$$

这两个轨迹方程都是圆，且容易验证这两个轨迹上除 l 与 $\odot O$ 的交点外的所有点都满足反演后半径相等的条件，其圆心在过点 O 与 l 垂直的直线 m 上，设 m 与 $\odot O$ 相交于点 P，则前一轨迹点 O、P 在 l 的同侧，后一轨迹点 O、P 在 l 的异侧. 容易验证，若 l 与 $\odot O$ 有交点，则轨迹圆必定过这些交点.

若两已知圆 O_1、O_2 的距离为 a，到反演圆圆心的距离分别是 d_1、d_2，两圆半径分别是 r_1、r_2，要反演后半径相等可得

$$\left|\frac{1}{d_1-r_1}-\frac{1}{d_1+r_1}\right|=\left|\frac{1}{d_2-r_2}-\frac{1}{d_2+r_2}\right|,$$

由此得 $r_2d_1^2-r_1d_2^2=r_1r_2(r_1-r_2)$ 以及 $r_2d_1^2+r_1d_2^2=r_1r_2(r_1+r_2)$，若反演圆圆心都在已知圆外或都在已知圆内则取 $r_2d_1^2-r_1d_2^2=r_1r_2(r_1-r_2)$，若反演圆在一个已知圆内而在另一个已知圆外则取 $r_2d_1^2+r_1d_2^2=r_1r_2(r_1+r_2)$. 设两圆圆心分别是 $(a/2,0)$、$(-a/2,0)$，则由 $r_2d_1^2-r_1d_2^2=r_1r_2(r_1-r_2)$，当 $r_1=r_2$ 时得 $d_1=d_2$，此时反演圆圆心在两已知圆圆心连线的中垂线上；当 $r_1\neq r_2$ 时得反演圆圆心得方程是

$$\left(x+\frac{a(r_1+r_2)}{2(r_1-r_2)}\right)^2+y^2=r_1r_2\left(\frac{a^2}{(r_1-r_2)^2}-1\right);$$

由 $r_2d_1^2+r_1d_2^2=r_1r_2(r_1+r_2)$ 得反演圆圆心得方程是

$$\left(x+\frac{a(r_1-r_2)}{2(r_1+r_2)}\right)^2+y^2=r_1r_2\left(1-\frac{a^2}{(r_1+r_2)^2}\right),$$

这两个轨迹方程都是圆，其圆心在直线 O_1O_2 上，前一轨迹的圆心是 O_1O_2 的外分点，后一轨迹的圆心是 O_1O_2 的内分点，其圆心到 O_1、O_2 的距离比都是 $r_1:r_2$，后续还要做一些讨论来判别对已知圆的位置. 两已知圆方程是

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=r_1^2, \tag{1}$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2=r_2^2, \tag{2}$$

$r_2(1)-r_1(2)$ 就能得到第一个圆的轨迹方程，$r_2(1)+r_1(2)$ 就能得到第二个圆的轨迹方程，因此若两已知圆有交点，则必定在反演圆圆心的轨迹上，也就是说除了交点以外，反演圆圆心的轨迹必定是以下四种情

形之一：（a） 同在已知圆外，（b） 同在已知圆内，（c） 一部分同在已知圆外另一部分同在已知圆内，（d） 在一已知圆外且在另一已知圆内，由此可知若轨迹存在，则轨迹必定是整个圆除去两已知圆的交点．若两已知圆外离或外切，则只有第一种轨迹存在；若两已知圆相交，则两种轨迹都存在；若两圆内含或内切，则只有第二种轨迹存在．

利用上面的结论，下面来解决一个作图问题：给定三个两两外切的圆，求作三个两两相切的圆，每个新作的圆与两个已知的圆都相切．

先解决特殊情况下的问题，如图 1，若给定三个半径是 r 且两两外切的圆 A、B、C，假设已经作出了所要作的圆，其中一个圆的圆心是 E，$\triangle ABC$ 的中心是 O，AB 的中点是 D，则点 E 一定在 DO 上，$\angle ADO=90^\circ$，$\angle DAO=30^\circ$，$\angle AOD=60^\circ$．设 $EO=x$，则 $AE=r+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，$AO=\dfrac{2}{\sqrt{3}}r$，由余弦定理得 $EO^2+AO^2-2\cdot EO\cdot AO\cdot\cos\angle AOD=AE^2$，即

$$x^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}r\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}r\cdot\cos 60^\circ=\left(r+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2,$$

解这个方程得

$$x=\left(\frac{10}{3}\sqrt{3}\pm 4\sqrt{2}\right)r,$$

图 1 是上式取“$-$”的情形，而上式取“$+$”的情形就是给定图 1 中的三个小圆作出三个大圆的情形．根据这个结果我们就能作图．

若给定 $\odot A$、$\odot B$、$\odot C$，其半径分别是 r_A、r_B、r_C，根据上面的结论，如图 2，作线段 AB 的外分点 D 使 $AD:BD=r_A:r_B$，以点 D 为圆心作圆使其过 $\odot A$、$\odot B$ 的切点，作线段 BC 的外分点 E 使 $BE:CE=r_B:r_C$，以点 E 为圆心作圆使其过 $\odot B$、$\odot C$ 的切点，所作的两圆相交于点 F、G，其中点 F 在 $\triangle ABC$ 外，点 G 在 $\triangle ABC$ 内，则以点 F、G 为反演圆圆心的圆能把 $\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 反演为三个两两外切的圆，利用上面的特例作出三个所求的圆后再把这三个圆反演就能得到解，特例中取“$-$”的情形，以点 F 为反演圆圆心得到的解如图 3，以点 G 为反演圆圆心得到的解如图 4．

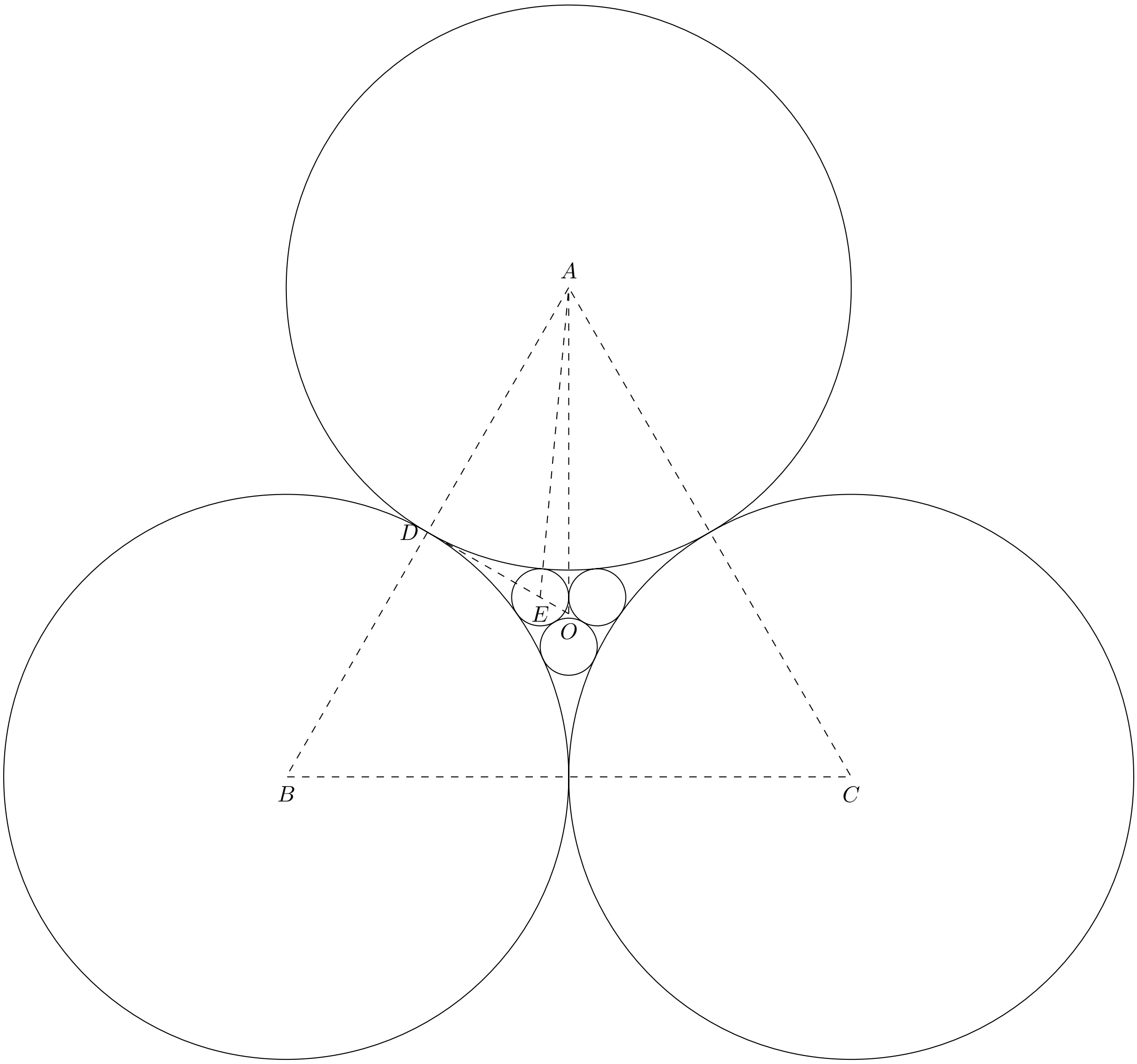

图 1

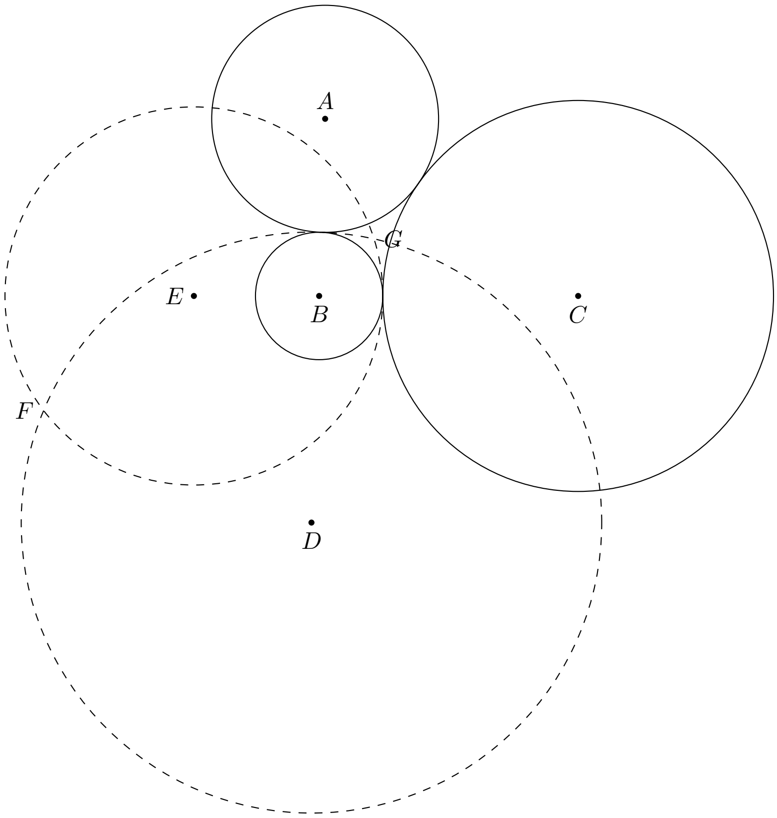

图 2

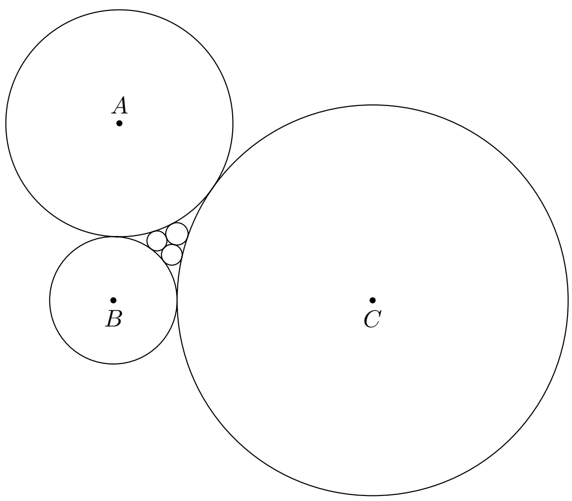

图 3

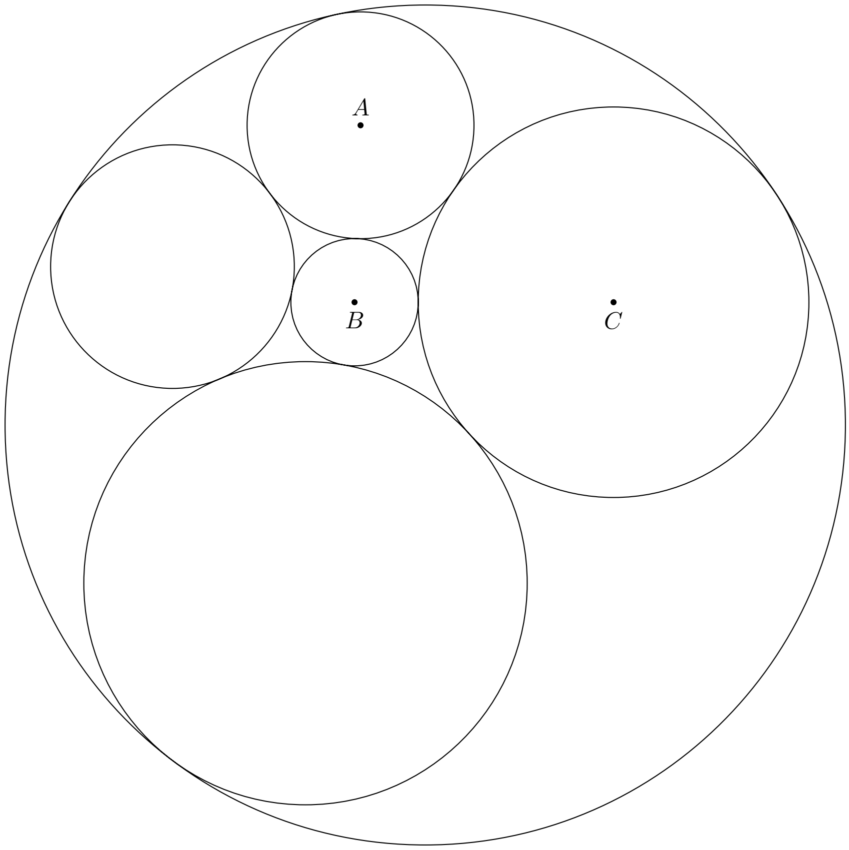

图 4