已知圆锥曲线上五点或圆锥曲线上五切线作圆锥曲线

何万程

2016 年 2 月 16 日

下面讨论已知圆锥曲线上五点或圆锥曲线上五切线时作圆锥曲线的方法，着重讨论如何作出焦点和抛物线的准线。

已知圆锥曲线上五点作切线

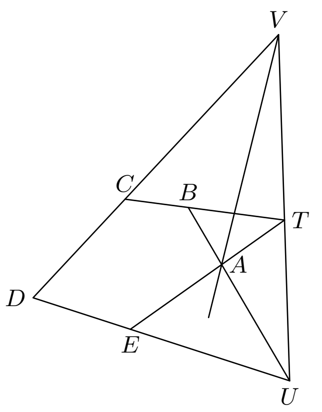

图 1

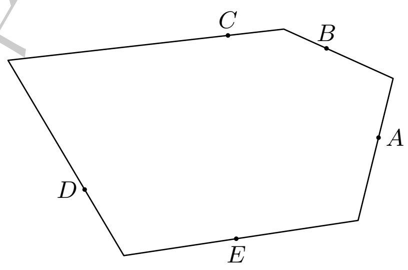

图 2

若给定圆锥曲线上的五点 A、B、C、D、E，根据 Pascal 定理，过点 A 的切线与直线 CD 的交点 T、直线 BC 与直线 EA 的交点 T、直线 AB 与直线 DE 的交点 U 这三点共线（图 1），由此得求过点 A 切线的作图法：

第一步：作直线 BC 与直线 EA 的交点 T、直线 AB 与直线 DE 的交点 U 这三点共线；
第二步：作直线 CD 与直线 TU 的交点 V；
第三步：直线 AV 就是所求的切线。

重复上述作图，便可作出所有切线（图 2）。

已知圆锥曲线上五切线作切点

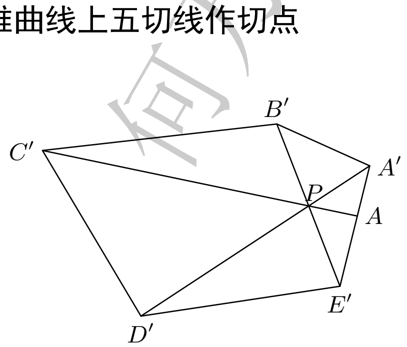

图 3

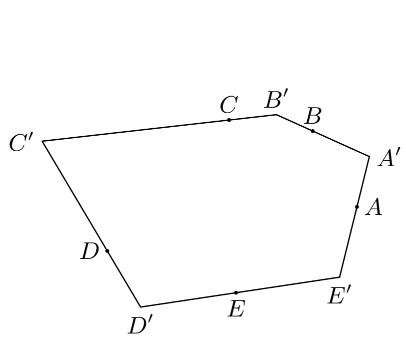

图 4

若给定切线 $A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$A'E'$、$E'A'$，设切线 $E'A'$ 与圆锥曲线的切点是 A，根据 Brianchon 定理，直线 $A'D'$、$B'E'$、$C'A$ 交于点 P（图 3），由此得求切线 $E'A'$ 与圆锥曲线的切点的作图法：

第一步：作直线 $A'D'$ 与直线 $B'E'$ 的交点 P；
第二步：作直线 $C'P$ 与直线 $E'A'$ 的交点 A；
第三步：点 A 就是所求的切点。

重复上述作图，便可作出所有切点（图 4）。

由上面的作图方法可知，只要给定圆锥曲线上的五点，则过这五点的切线能作图确定的；给定圆锥曲线上的五切线，则这五条切线的切点也能作图确定。

作椭圆、双曲线的中心或抛物线轴的方向

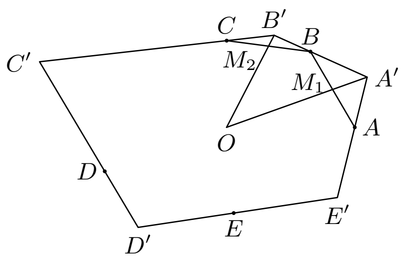

图 5

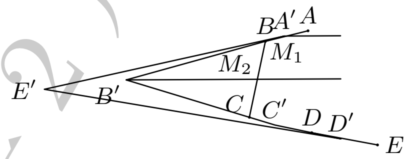

图 6

设已作出圆锥曲线上五点 A、B、C、D、E 以及分别以上述点为切点的切线 $E'A'$、$A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$A'E'$。设 AB 的中点是 M_1，BC 的中点是 M_2。若过五点 A、B、C、D、E 的圆锥曲线是椭圆或双曲线，则直线 $A'M_1$ 和直线 $B'M_2$ 过其中心 O（图 5）；若过五点 A、B、C、D、E 的圆锥曲线是抛物线（图 6），则直线 $A'M_1$ 和直线 $B'M_2$ 平行于抛物线的轴，由此得作椭圆、双曲线的中心或抛物线轴的方向的作图法：

第一步：作 AB 的中点 M_1，BC 的中点 M_2；
第二步：若直线 $A'M_1$ 和直线 $B'M_2$ 相交于点 O，则点 O 就是所求的椭圆或双曲线的中心；若直线 $A'M_1$ 和直线 $B'M_2$ 平行，则直线 $A'M_1$ 或直线 $B'M_2$ 就是所求的抛物线轴的方向。

作椭圆或双曲线的一条直径及与此直径共轭方向平行的一弦

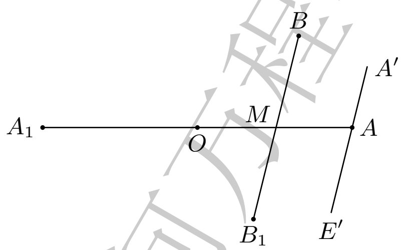

图 7

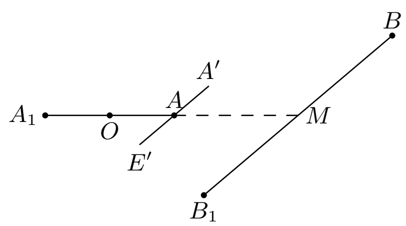

图 8

设点 A、B 是椭圆或双曲线上两点，直线 $E'A'$ 是过点 A 的椭圆或双曲线的切线，椭圆或双曲线的中心是 O，作椭圆或双曲线的一条直径及与此直径共轭方向平行的一弦的作图法：

第一步：作点 A 关于点 O 的对称点 A_1，AA_1 就是所求的直径；
第二步：过点 B 作直线平行于直线 $E'A'$ 交直线 AA_1 于点 M；
第三步：作点 B 关于点 M 的对称点 B_1，BB_1 就是所求的弦。

若点 M 在 AA_1 内（图 7），则所要作的圆锥曲线是椭圆；若点 M 在 AA_1 外（图 8），则所要作的圆锥曲线是双曲线。

已知椭圆一条直径及与此直径共轭方向平行的一弦作此椭圆

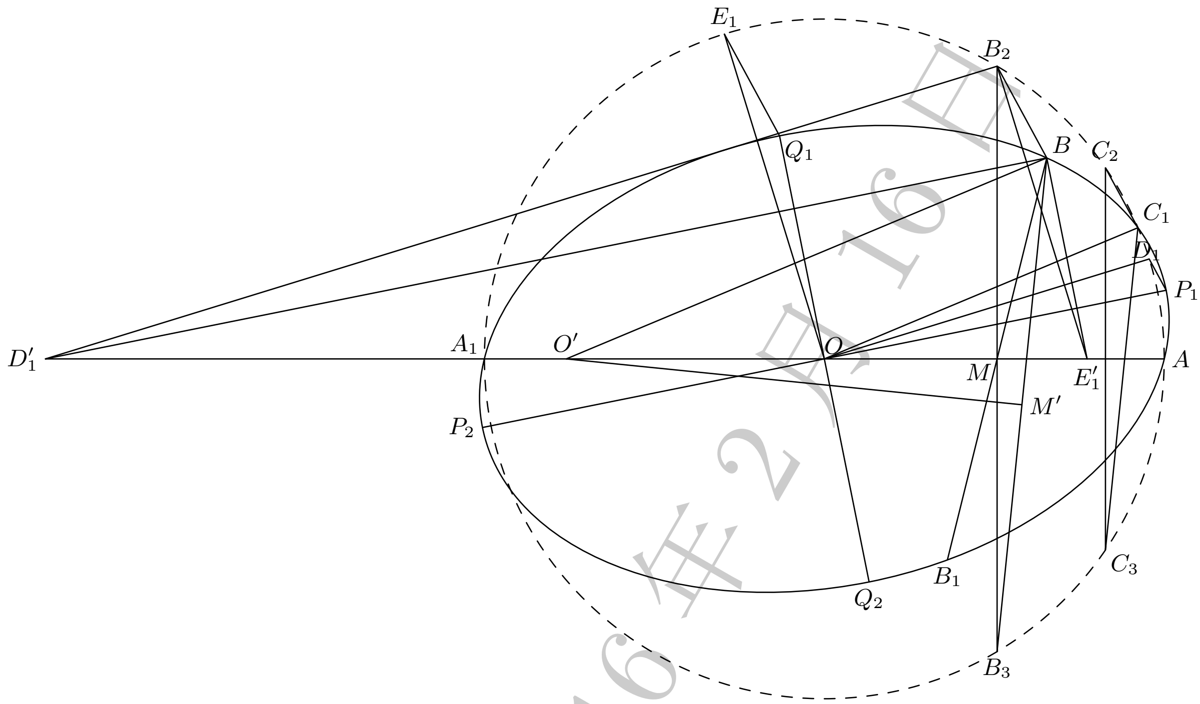

图 9

如图 9，设已知椭圆的一直径 AA_1 以及与直径 AA_1 的共轭方向平行的弦 BB_1，椭圆的中心是 O，AA_1 与 BB_1 相交于点 M，椭圆的主轴分别是 P_1P_2、Q_1Q_2。因为任何椭圆都可以由圆通过射影变换得到，设这个椭圆是由以点 O 为圆心，OA 为半径的圆通过射影变换得到的，$OA = OC_1$，则 P_1P_2 是 $\angle AOC_1$ 的角平分线，由射影变换的性质知 $\triangle BB_2B_3$ 与 $\triangle C_1C_2C_3$、$\triangle BB_2D_1'$ 与 $\triangle P_1D_1O$、$\triangle BB_2E_1'$ 与 $\triangle Q_1E_1O$ 分别都是位似的，由此得椭圆的作图法：

第一步：以点 O 为圆心，OA 为半径作 $\odot O$；

第二步：过点 M 作 AA_1 的垂线，交 $\odot O$ 于点 B_2、B_3；

第三步：作 BB_3 的垂直平分线，交直线 AA_1 于点 O'；

第四步：过点 O 作 BO' 的平分线，交 $\odot O$ 于点 C_1，且点 B、C_1 在直线 AA_1 同侧；

第五步：作 $\angle AOC_1$ 的角平分线 l_1（直线 P_1P_2），过点 O 作 l_1 的垂线 l_2（直线 Q_1Q_2），l_1、l_2 就是椭圆的两主轴；

第六步：过点 B 作 l_1 的平行线，交直线 AA_1 于点 D_1'；

第七步：过点 O 作 B_2D_1' 的平行线，交 $\odot O$ 于点 D_1，且点 B、D_1 在直线 AA_1 同侧，过点 D_1 作 BB_2 的平行线，交 l_1 于点 P_1，作点 P_1 关于点 O 的对称点 P_2，点 P_1、P_2 就是椭圆一主轴的两端点；

第八步：过点 B 作 l_2 的平行线，交直线 AA_1 于点 E_1'；

第九步：过点 O 作 B_2E_1' 的平行线，交 $\odot O$ 于点 E_1，且点 B、E_1 在直线 AA_1 同侧，过点 E_1 作 BB_2 的平行线，交 l_2 于点 Q_1，作点 Q_1 关于点 O 的对称点 Q_2，点 Q_1、Q_2 就是椭圆另一主轴的两端点。

作出椭圆的两主轴的四端点后，椭圆的焦点就能确定，整个椭圆就能用椭圆的定义去作图了。

已知双曲线一条直径及与此直径共轭方向平行的一弦作此椭圆

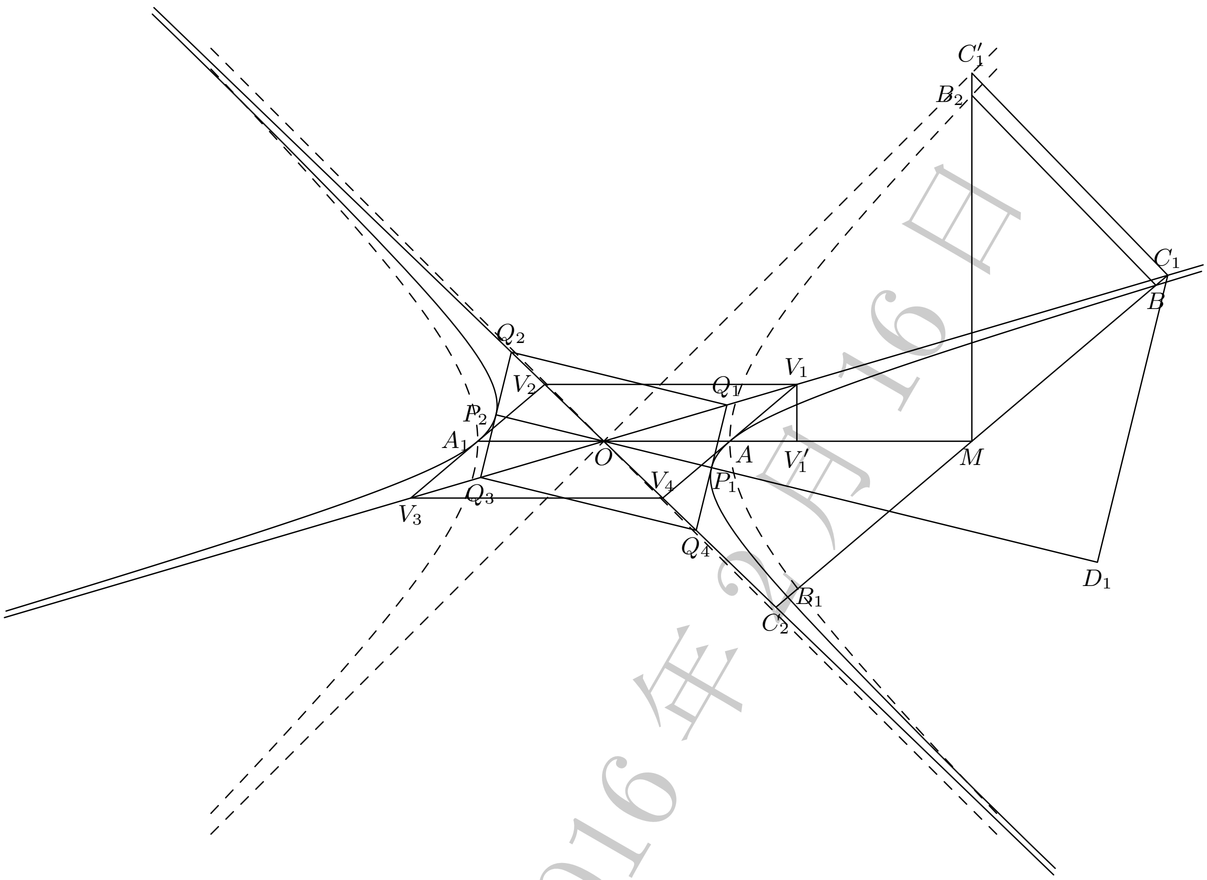

图 10

如图 10，设已知双曲线的一直径 AA_1 以及与直径 AA_1 的共轭方向平行的弦 BB_1，双曲线的中心是 O，AA_1 与 BB_1 相交于点 M，双曲线的基本矩形是 $Q_1Q_2Q_3Q_4$。双曲线的实轴是两渐近线含双曲线的那部分角的平分线，设直径 AA_1 的基本平行四边形是 $V_1V_2V_3V_4$，则矩形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 的面积与平行四边形 $V_1V_2V_3V_4$ 的面积相等，因为任何双曲线都是由等轴双曲线经过射影变换得到的，设该双曲线是由以点 A、A_1 为实轴端点的等轴双曲线经射影变换得到的，，由射影变换的性质知 $\triangle MBB_2$ 和 $\triangle MC_1C_1'$ 是位似的，由此得双曲线的作图法：

第一步：过点 M 作直线 AA_1 的垂线，在垂线上取两点 B_2、C_1'，使 $MB_2 = \sqrt{OM^2 - OA^2}$，$MC_1' = OM$；

第二步：过点 C_1' 作直线 BB_2 的平行线，交直线 BB_1 于点 C_1，作点 C_1 关于点 M 的对称点 C_2，直线 OC_1、OC_2 就是双曲线的渐近线；

第三步：作直线 OC_1、OC_2 含点 A 的部分及其对顶角的平分线 l（直线 P_1P_2），l 就是双曲线的实轴；

第四步：过点 A 作直线 BB_1 的平行线，交直线 OC_1 于点 V_1，过点 V_1 作直线 AA_1 的垂线，交直线 AA_1 于点 V_1'；

第五步：过点 C_1 作 l 的垂线，交 l 于点 D_1；

第六步：在 l 上取一点 P_1，使 $OP_1 = OD_1 \cdot \sqrt{\dfrac{OA \cdot V_1'V_1}{OD_1 \cdot D_1C_1}}$，作点 P_1 关于点 O 的对称点 P_2，点 P_1、P_2 就是双曲线实轴的两端点；

第七步：过点 P_1、P_2 作 l 的垂线，交直线 OC_1、OC_2 于点 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4，四边形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 就是双曲线的基本矩形。

作出双曲线的基本矩形后，双曲线的焦点就能确定，整个双曲线就能用双曲线的定义去作图了。

已知抛物线上三点以及轴的方向作抛物线

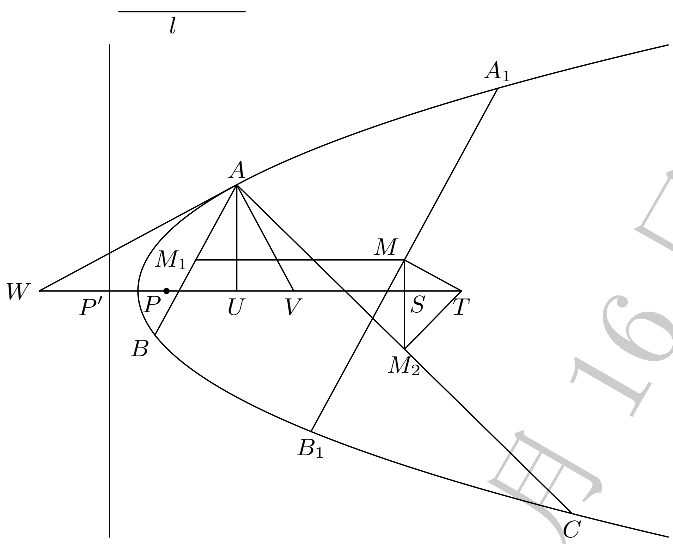

图 11

如图 11，设已知抛物线上的点 A、B、C 以及轴的方向 l，抛物线的交点到准线的距离是 p，弦 $A_1B_1 \parallel AB$，AB 的中点是 M_1，AC 的中点是 M_2，过点 M_2 且垂直于 l 的直线交抛物线的轴于点 S，AC 的垂直平分线交抛物线的轴于点 T，A_1B_1 的中点是 M，$MT \parallel A_1B_1$，则 $MM_1 \parallel l$，点 A 到抛物线轴的垂足是 U，过点 A 抛物线的法线交抛物线于点 V，过点 A 抛物线的切线交抛物线于点 W，则 $ST = UV = p$，VW 的中点 P 就是抛物线的焦点，由此得抛物线的作图法：

第一步：作 AB 的中点 M_1，作 AC 的中点 M_2；
第二步：过点 M_1 作 l 的平行线，过点 M_2 作 l 的垂线，作两直线的交点 M；
第三步：过点 M 作直线 AB 的垂线，过点 M_2 作直线 AC 的垂线，作两直线的交点 T；
第四步：过点 T 作 l 的平行线 l（直线 PP'），l 就是抛物线的轴；
第五步：作直线 M_2M 与 l 的交点 S；
第六步：作点 A 在 l 上的垂足 U，在 l 上取点 V，使 $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{ST}$；
第七步：过点 A 作直线 AV 的垂线，作其与 l 的交点 W；
第八步：作 WV 的中点 P，点 P 就是抛物线的焦点；
第九步：在 l 上取点 P'，使 $\overrightarrow{P'P} = \overrightarrow{ST}$，过点 P' 作 l 的垂线，这条直线就是抛物线的准线。

作出抛物线的焦点和准线后便可便可用抛物线的定义作图。

已知抛物线上四点作抛物线

如图 12，设已知抛物线上的点 A、B、C、D，直线 AB 与 CD 相交于点 O，抛物线的轴分别交 AB、CD 相交于点 P、Q，则 $\dfrac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD} = \dfrac{OP^2}{OQ^2}$，因此在直线 AB 上取点 U 使 $OU = \sqrt{OA \cdot OB}$，在直线 CD 上取点 V 使 $OV = \sqrt{OC \cdot OD}$，则直线 UV 的方向就是抛物线轴的方向，这样就转化成已知抛物线上三点以及轴的方向作抛物线的作图。一般满足条件的抛物线有两条，轴的方向分别对应 UV 和 UV'。

已知抛物线上四切线作抛物线

如图 13，设已知抛物线上的切线 l_1、l_2、l_3、l_4，l_1 与 l_2 相交于点 A，l_1 与 l_3 相交于点 B，l_1 与 l_4 相交于点 C，l_2 与 l_3 相交于点 D，l_2 与 l_4 相交于点 E，l_3 与 l_4 相交于点 F，则 $\triangle ABD$、$\triangle ACE$、$\triangle BCF$、$\triangle DEF$ 的外

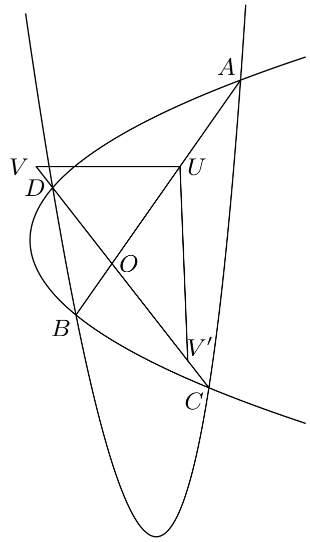

图 12

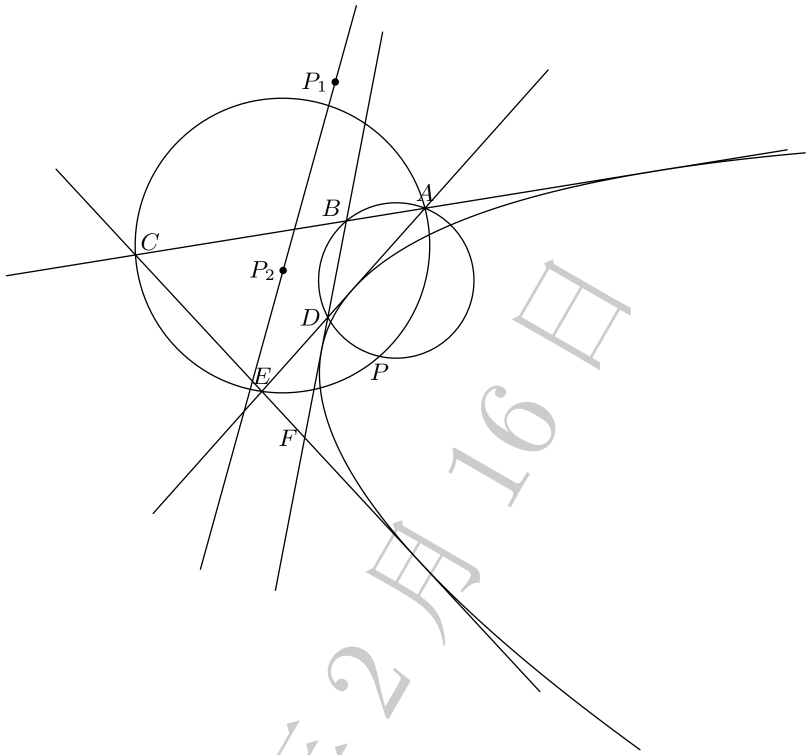

图 13

接圆相交于抛物线的焦点 P，点 P 关于 l_1、l_2、l_3、l_4 的对称点都在抛物线的准线上，由此得抛物线的作图法：

第一步：作 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 的外接圆；

第二步：作 $\odot ABD$ 和 $\odot ACE$ 的另一交点 P，P 就是抛物线的焦点；

第三步：分别作点 P 关于直线 AB、BD 的对称点 P_1、P_2，直线 P_1P_2 就是抛物线的准线。

作出抛物线的焦点和准线后便可便可用抛物线的定义作图。

若已知圆锥曲线上五点或五切线，经前面确定中心或抛物线轴方向时确定圆锥曲线是抛物线，可使用已知抛物线上三点以及轴的方向作抛物线的作图法或已知抛物线上四切线作抛物线的作图法。