

多项式相乘的矩阵形式

◎黄嘉威 (暨南大学信息科技学院数学系 广东省广州市 510632)

【摘要】本文把多项式相乘的过程分解为矩阵形式,简化多项式相乘的运算.并引进从给定条件把矩阵简化为方阵的方法,使得分母有理化和极小多项式问题一般化.

【关键词】多项式;分母有理化;极小多项式

1. 多项式相乘的矩阵形式

$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$ 就是一个多项式相乘的简单例子.虽然多项式相乘可以用卷积来计算,可是卷积的性质还是没有矩阵那么好.

$$(ax+b)(cx+d) = \begin{cases} acx^2 \\ +bcx+adx \\ +bd \end{cases} = \begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \\ c & b \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

如是者不管两个多项式有多长,都能分解成三个矩阵的乘积.

$$(ax^2+bx+c)(dx+e) = \begin{pmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \\ c & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}.$$

以下会用到矩阵的逆和特征多项式来求解问题,但是用到这些性质之前先把矩阵化成方阵.这里首先说明矩阵上消元的方法.这相当于在 $x^2=2$ 时,

把 $(ax+b)(cx+d) = (ad+bc)x + bd + 2ac$ 也表达成矩阵乘积的问题.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \\ c & b \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ 0+2a & b+2 \times 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ 2a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} bc+ad \\ 2ac+bd \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

我们看到第二步已经把中间的矩阵化为方阵,最后算出来的与结果一致.

2. 分母有理化

将 $\frac{1}{1+2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}}$ 表为 $1/\sqrt[3]{2}/\sqrt[3]{4}$ 的线性组合.对于这个问

题在《近世代数》中提供了四种解法,当中用了辗转相除法、待定系数法、线性方程组求解.其中解2不能避免多项式相乘的复杂运算.[1]以下用书中的解2求解上述问题.

$a^3=2, (1+2a+3a^2)(x+ya+za^2)=1$, 则 $x+ya+za^2$ 为问题所需要的解.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

于是就得到解2中的线性方程组,求解之,问题就解决了.这里就用到了矩阵的逆.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{89} \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}$$

此解法也适用于书[1]中的例7,即 $a^3=a-1$,

$$(8+6a+a^2)(x+ya+za^2)=1.$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -6 & 8 & 0 \\ 1 & -6 & 8 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -6 & 8 & -1 \\ 1 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -1 & 6 \\ -6 & 9 & -7 \\ 1 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & 6 \\ -6 & 9 & -7 \\ 1 & -6 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{427} \begin{pmatrix} 39 \\ 47 \\ 27 \end{pmatrix} x + ya + za^2 =$$

$$\frac{1}{427}(39+47a+27a^2).$$

于是对于分母有理化问题就转化成了求多项式相乘方阵的逆的问题.

3. 极小多项式

这里先引入一个简单的问题:若 $x^2+ax+b=0$ $\mu=cx+d$ 构造 u 的极小多项式.

假设关于 u 的方程有 $u_1=cx_1+d$ $u_2=cx_2+d$ 两个解.

$$u_1=cx_1+d \quad u_2=cx_2+d.$$

$$u_1+u_2=c(x_1+x_2)+2d=2d-ac.$$

$$u_1u_2=(cx_1+d)(cx_2+d)=c^2x_1x_2+cd(x_1+x_2)+d^2=bc^2-acd+d^2.$$

关于 u 的方程为 $u^2+(ac-2d)u+bc^2-acd+d^2=0$, 方程左边就是极小多项式.

如是者,所有关于 u 的基本对称多项式都要求出来,这样会很麻烦.但事实上,只需要计算 u 在多项式相乘时的方阵,并求出其特征多项式,问题就一下子解决了.

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d-ac & c \\ -bc & d \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-(d-ac) & -c \\ bc & \lambda-d \end{vmatrix} = \lambda^2 + (2d-ac)\lambda + d^2 - acd + bc^2.$$

(下转 129 页)

能想到的知识点和解题思想方法,师生共同探索出一个或多个解题方案,让学生在整个问题过程中真正了解在什么情况使用什么方法,采取哪种方案更有利于问题解决.“我图画我心”教师通过学生画出的思维导图,能够知道学生的认知结构,可以很容易了解到学生对问题的理解程度、解题思路以及在问题中暴露出的不足与错误,找出学生解题过程中的易错点与闪光点,对不同的学生进行有针对性的指导,因材施教.通过将自己的思维导图与教师制作的思维导图作对比,学生能够及时地查漏补缺,最大限度地提高学习效率.

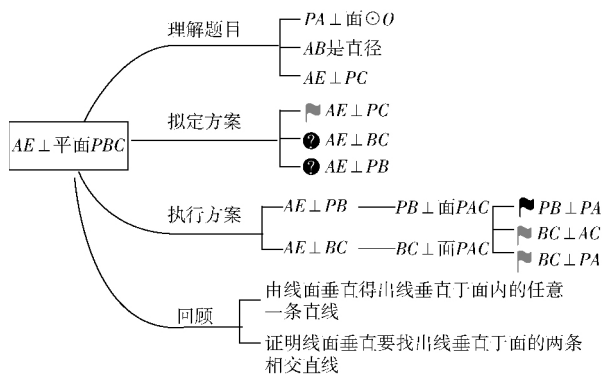


图 3

备注:绿色红旗表示“Yes”,黑色表示“No”,问号表示“Question”.

基于思维导图的数学问题解决以核心问题为主线,并将主要问题分解为若干小问题,以问题引导学生思考,将知识的学习贯穿在问题的思考之中.国外的研究发现,学生拥有组织性的知识可以建立学习的“脚手架”,更易产生有意义的学习.思维导图以一种非线性组织形式,整合结构图与文字表征,比传统的文字性叙述更能清晰表征知识,从而促进有效学习的发生和旧知识之间的整合与建构.基于思维导图下的问题解决可以沟通各部分内容之间的联系,感受数学的整体性,充分调动学生的积极性,激发学生的创新潜能.

(上接 127 页)

以下证明:设 x 为多项式方程的根 $\mu(x)$ 在多项式相乘时的方阵为 U , U 的特征多项式为 $f(\lambda)$, 则 $f(u(x)) = 0$.

对 $\sum_{r=0}^{n-1} k_r x^r = u(x)$ 进行矩阵分解:

$$\begin{pmatrix} x^{n-1} & x^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{2,n-1} & k_{2,n-2} & \cdots & k_{2,1} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x^{n-1} & x^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} k_{1,n-1} & k_{1,n-2} & \cdots & k_{1,1} \end{pmatrix}^T u(x) = u(x) \times 1, [u(x)]^2 = u(x) \times u(x), [u(x)]^m = u(x) \times [u(x)]^{m-1}, \text{如此类推:}$$

$$[u(x)]^m = \begin{pmatrix} x^{n-1} & x^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} U^m \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T$$

设 U 的特征多项式为 $f(\lambda) = \sum_{m=0}^n c_m \lambda^m$, 则有 $f(U) =$

$$\sum_{m=0}^n c_m U^m = 0.$$

$$f(u(x)) = \sum_{m=0}^n c_m [u(x)]^m = \begin{pmatrix} x^{n-1} & x^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\sum_{m=0}^n c_m U^m \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T = 0.$$

问题得证,于是通过特征多项式就能构造出一个关于 u 的方程.这个方程不一定是极小的,但一般都是极小的.

再以书[1]中习题5-3第4题为例:设 a 是 $x^3 - 2x + 2$ 的根,求 $a^2 - 1$ 的极小多项式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 3 \text{ 结果就是} \\ (a^2 - 1)^3 - (a^2 - 1)^2 - (a^2 - 1) - 3 = 0.$$

于是对于极小多项式问题就转化成了求多项式相乘方阵的特征多项式的问题.

【参考文献】

[1] 韩士安,林磊.近世代数[M].北京:科学出版社,2009.