子单形内切球半径的几何不等式及其代数不等式

李兴源 lihpb@qq.com

摘 要

本文给出有关n维单形中各侧面内切球半径的一系列几何不等式，并通过构造一类特殊的单形进而将这些几何不等式改写成代数不等式。

关键词

n维单形，子单形，内切球半径，几何不等式，Cayley-Menger行列式

Some Geometric Inequalities and Algebraic Inequalities on the Radii of Inscribed Sphere for each Subsimplex

Xingyuan Li, lihpb@qq.com

Abstract

This article presents the geometric inequalities for the inscribed spherical radii on each side in the n-simplex, and rewrites these geometric inequalities into algebraic inequalities by constructing a special type of simplex.

Keywords

N-Simplex, Subsimplex, Inradius, Geometric Inequality, Cayley-Menger Determinant

1. 引言

本文约定：n 维单形 $A_0A_1A_2\ldots A_n$ 的体积为 V，其内切球半径为 r，各顶点 $A_i(i=0,1,2,\ldots,n)$ 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积为 S_i，垂直于底面 S_i 的高为 h_i，$n-1$ 维子单形 S_i 的内切球半径为 ρ_i，S_i 的旁切球半径为 r_i，$n\geq 3$。

文[1]给出了以下结论

定理 1 $\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\rho_i^2}\leq\frac{n-1}{r^2}$。

等号成立的充要条件是该单形为正则单形。

本文将证明以下结论

定理 2 $\sum_{i=0}^{n}\frac{\rho_i^2}{r_i^2}\geq n-1$。

等号成立的充要条件是该单形为正则单形。

定理 3 $\sum_{i=0}^{n}\frac{\rho_i}{h_i}>\frac{n+1}{n}$。

定理 4 $\frac{1}{\rho_i}+\frac{1}{h_i}<\frac{1}{r}$，$\frac{1}{\rho_i}<\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{h_j}$。

本文的最后会通过构造一类特殊的单形进而将定理 1 和定理 2 改写成对应的代数不等式。

2. 定理证明

以下设 $S=\sum_{i=0}^{n}S_i$。

引理 1 $\frac{1}{r}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{h_i}=\frac{S}{nV}$。[2]

引理 2 $r_i=\frac{nV}{S-2S_i}$。

引理 3 $\frac{r}{\rho_i}\leq\sqrt{\frac{S-2S_i}{S}}\leq\frac{\rho_i}{r_i}$，$0\leq i\leq n$。[3]

证明：设 S_i 与 S_j 所交的 $n-2$ 维单形及其体积为 $F_{ij}(i,j=0,1,2,...,n;i\neq j)$，$S_i$ 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij}。由文[4]有

$$nVF_{ij}=(n-1)S_iS_j\sin\theta_{ij},$$

上式两边对 j 求和并整理得

$$\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}S_j\sin\theta_{ij}=\frac{nV\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}F_{ij}}{(n-1)S_i}。\quad(1)$$

根据单形的射影定理

$$S_i=\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}S_j\cos\theta_{ij},$$

由上式与 Cauchy 不等式，有

$$\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}S_j\sin\theta_{ij}=\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\sqrt{(S_j+S_j\cos\theta_{ij})(S_j-S_j\cos\theta_{ij})}\leq\sqrt{\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(S_j+S_j\cos\theta_{ij})\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(S_j-S_j\cos\theta_{ij})}$$
$$=\sqrt{S(S-2S_i)}。\quad(2)$$

由引理 1 可知

$$\rho_i = \frac{(n-1)S_i}{\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} F_{ij}}\text{，(3)}$$

再把引理 1 和(3)代入(1)，得

$$\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} S_j \sin\theta_{ij} = \frac{r}{\rho_i} S\text{。(4)}$$

由(2)、(4)可得

$$\frac{r}{\rho_i} \le \sqrt{\frac{S-2S_i}{S}}\text{，}$$

即

$$\rho_i \ge \sqrt{\frac{S}{S-2S_i}}\cdot r\text{。}$$

对上式两边除以 r_i 并由引理 2 可得

$$\frac{\rho_i}{r_i} \ge \sqrt{\frac{S}{S-2S_i}}\cdot\frac{r}{r_i} = \sqrt{\frac{S}{S-2S_i}}\cdot\frac{S-2S_i}{S} = \sqrt{\frac{S-2S_i}{S}}\text{。}$$

综上，命题得证。

对引理 3 两边平方再求和即可分别证得定理 1 和定理 2。

定理 3 的证明：根据引理 3 并运用均值不等式，得

$$\frac{h_i}{\rho_i} = \frac{r}{\rho_i}\cdot\frac{h_i}{r} \le \sqrt{\frac{S-2S_i}{S}}\cdot\frac{S}{S_i} = \sqrt{\frac{S}{S_i}-2}\cdot\sqrt{\frac{S}{S_i}} < \frac{S}{S_i}-1 = \frac{S-S_i}{S_i}\text{，}\quad 0\le i\le n\text{。(5)}$$

则

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\rho_i}{h_i} > \sum_{i=0}^{n}\frac{S_i}{S-S_i}\text{。(6)}$$

令 $S_0 \le S_1 \le S_2 \le \ldots \le S_n$，则

$$\frac{1}{S-S_0} \le \frac{1}{S-S_1} \le \frac{1}{S-S_2} \le \ldots \le \frac{1}{S-S_n}\text{。}$$

对(6)先后运用 Chebyshev 不等式与 Cauchy 不等式，得

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\rho_i}{h_i} > \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} S_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{S-S_i}\right) \ge \frac{S}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^2}{\sum\limits_{i=0}^{n}(S-S_i)} = \frac{n+1}{n}\text{。}$$

定理 4 的证明：由(5)可得

$$\frac{h_i}{\rho_i}+1 < \frac{S}{S_i} = \frac{h_i}{r}\text{，}\quad 0\le i\le n\text{。}$$

对上式两边除以 h_i 再根据引理 1 即可证得命题。

3. 代数不等式的构造

引理 4 n 维单形 $A_0A_1A_2\ldots A_n$ 的各棱长 $A_iA_j = a_{ij}(i,j=0,1,2,\ldots,n;a_{ij}=a_{ji};a_{ii}=0)$，则

$$V^2=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n(n!)^2}D(A_0,A_1,A_2,...,A_n)\text{，}\quad(7)$$

其中$D(A_0,A_1,A_2,...,A_n)$为$n+2$阶 Cayley-Menger 行列式，即

$$D(A_0,A_1,A_2,...,A_n)=\begin{vmatrix}0&1&1&1&...&1\\1&0&a_{01}^2&a_{02}^2&...&a_{0n}^2\\1&a_{01}^2&0&a_{12}^2&...&a_{1n}^2\\1&a_{02}^2&a_{12}^2&0&...&a_{2n}^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&a_{0n}^2&a_{1n}^2&a_{2n}^2&...&0\end{vmatrix}\text{。}$$ [5]

以下设a_0、a_1、a_2、...、$a_n>0$，$n\ge 3$。下面开始构造一类特殊的n维单形

令n维单形$A_0A_1A_2...A_n$的各棱长满足$A_iA_j{}^2=a_{ij}^2=a_i+a_j(i,j=0,1,2,...,n;i\ne j)$，则

引理 5 $V^2=\frac{1}{(n!)^2}\sum_{i=0}^{n}a_0...a_{i-1}a_{i+1}..a_n=\frac{1}{(n!)^2}\left(\prod_{i=0}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$。

证明：由引理 4 有

$$D(A_0,A_1,A_2,...,A_n)=\begin{vmatrix}0&1&1&1&...&1\\1&0&a_0+a_1&a_0+a_2&...&a_0+a_n\\1&a_0+a_1&0&a_1+a_2&...&a_1+a_n\\1&a_0+a_2&a_1+a_2&0&...&a_2+a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&a_0+a_n&a_1+a_n&a_2+a_n&...&0\end{vmatrix}\text{。}$$

对上面行列式作以下变形：

1.将第一行乘以$-a_i$加到第$i+2$行$(i=0,1,2,...,n)$；

2.将第一列乘以$-a_i$加到第$i+2$列$(i=0,1,2,...,n)$；

则

$$D(A_0,A_1,A_2,...,A_n)=\begin{vmatrix}0&1&1&1&...&1\\1&-2a_0&0&0&...&0\\1&0&-2a_1&0&...&0\\1&0&0&-2a_2&...&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&0&...&-2a_n\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}2^n\sum_{i=0}^{n}a_0...a_{i-1}a_{i+1}..a_n\text{。}$$

再将上式代入至(7)即可证得命题。

同理可得

引理 6 $S_i^2=\frac{1}{[(n-1)!]^2}\left(\prod_{j=0}^{n}a_j\right)\left(\sum_{\substack{j=0\\j\ne i}}^{n}\frac{1}{a_ia_j}\right)$，$0\le i\le n$。

引理 7 n 维单形 $A_0A_1A_2...A_n$ 中的任意两个 $n-1$ 维侧面 S_i 与 S_j 所交的 $n-2$ 维单形及其体积为

$F_{ij}(0\le i<j\le n;F_{ij}=F_{ji})$，则

$$F_{ij}^2=\frac{1}{[(n-2)!]^2}\left(\prod_{k=0}^{n}a_k\right)\sum_{\substack{k=0\\k\ne i,j}}^{n}\frac{1}{a_ia_ja_k}\text{。}$$

定理 5 $$\sum_{i=0}^{n}\frac{\left(\sum\limits_{\substack{j=0\\j\ne i}}^{n}\sqrt{\left(\sum\limits_{\substack{k=0\\k\ne i,j}}^{n}a_ia_ja_k\right)}\right)^2}{\sum\limits_{\substack{j=0\\j\ne i}}^{n}a_ia_j}\le\frac{(n-1)\left(\sum\limits_{i=0}^{n}\sqrt{\left(\sum\limits_{\substack{j=0\\j\ne i}}^{n}a_ia_j\right)}\right)^2}{\sum\limits_{i=0}^{n}a_i},$$

等号成立的充要条件是 $a_0=a_1=a_2=...=a_n$。

证明：由引理 1 与(3)可知定理 1 等价于

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(\sum\limits_{\substack{j=0\\j\ne i}}^{n}F_{ij})^2}{(n-1)^2S_i^2}\le\frac{(n-1)(\sum\limits_{i=0}^{n}S_i)^2}{n^2V^2},$$

将引理 5、引理 6、引理 7 代入到上式，得

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\left(\sum\limits_{\substack{j=0\\j\ne i}}^{n}\sqrt{\left(\prod\limits_{k=0}^{n}a_k\right)\left(\sum\limits_{\substack{k=0\\k\ne i,j}}^{n}\frac{1}{a_ia_ja_k}\right)}\right)^2}{\left(\prod\limits_{j=0}^{n}a_j\right)\left(\sum\limits_{\substack{j=0\\j\ne i}}^{n}\frac{1}{a_ia_j}\right)}\le\frac{(n-1)\left(\sum\limits_{i=0}^{n}\sqrt{\left(\prod\limits_{j=0}^{n}a_j\right)\left(\sum\limits_{\substack{j=0\\j\ne i}}^{n}\frac{1}{a_ia_j}\right)}\right)^2}{\left(\prod\limits_{i=0}^{n}a_i\right)\left(\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}\right)},\quad(8)$$

即

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\left(\sum\limits_{\substack{j=0\\j\ne i}}^{n}\sqrt{\left(\sum\limits_{\substack{k=0\\k\ne i,j}}^{n}\frac{1}{a_ia_ja_k}\right)}\right)^2}{\sum\limits_{\substack{j=0\\j\ne i}}^{n}\frac{1}{a_ia_j}}\le\frac{(n-1)\left(\sum\limits_{i=0}^{n}\sqrt{\left(\sum\limits_{\substack{j=0\\j\ne i}}^{n}\frac{1}{a_ia_j}\right)}\right)^2}{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}},$$

对上式作变换：$a_i\to\dfrac{1}{a_i}(i=0,1,2,...,n)$ 即可证得命题。

定理 6 $\sum_{i=0}^{n}\frac{\left(\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}a_ia_j\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\left(\sum_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}a_ja_k\right)}-2\sqrt{\left(\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}a_ia_j\right)}\right)^2}{\left(\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\sqrt{\sum_{\substack{k=0\\k\neq i,j}}^{n}a_ia_ja_k}\right)^2}\geq(n-1)\sum_{i=0}^{n}a_i$，

等号成立的充要条件是 $a_0=a_1=a_2=...=a_n$。

证明：由引理 2 与(3)可知定理 2 等价于

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(n-1)^2S_i^2(S-2S_i)^2}{(\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}F_{ij})^2}\geq(n-1)n^2V^2,$$

将引理 5、引理 6、引理 7 代入到上式，得

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\left(\prod_{j=0}^{n}a_j\right)\left(\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{a_ia_j}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\left(\prod_{j=0}^{n}a_j\right)\left(\sum_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\frac{1}{a_ja_k}\right)}-2\sqrt{\left(\prod_{j=0}^{n}a_j\right)\left(\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{a_ia_j}\right)}\right)^2}{\left(\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\sqrt{\left(\prod_{k=0}^{n}a_k\right)\left(\sum_{\substack{k=0\\k\neq i,j}}^{n}\frac{1}{a_ia_ja_k}\right)}\right)^2}\geq(n-1)\left(\prod_{i=0}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}\right),\quad(9)$$

即

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\left(\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{a_ia_j}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\left(\sum_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\frac{1}{a_ja_k}\right)}-2\sqrt{\left(\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{a_ia_j}\right)}\right)^2}{\left(\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\sqrt{\sum_{\substack{k=0\\k\neq i,j}}^{n}\frac{1}{a_ia_ja_k}}\right)^2}\geq(n-1)\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i},$$

对上式作变换：$a_i\to\frac{1}{a_i}(i=0,1,2,...,n)$ 即可证得命题。

事实上，在(8)、(9)中，如果不约去不等式两边分子分母的公因子 $\prod_{i=0}^{n}a_i$，则可直接得到比定理 5 和定理 6 更强的形式。

定理 7 a_0、a_1、a_2、...、a_n 为任意实数，且满足 $a_i+a_j>0(i,j=0,1,2,...,n;i\neq j;n\geq3)$，则

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\left(\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\sqrt{a_0\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_n\left(\sum_{\substack{k=0\\k\neq i,j}}^{n}\frac{1}{a_ja_k}\right)}\right)^2}{a_0\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_n\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{a_j}}\le\frac{(n-1)\left(\sum_{i=0}^{n}\sqrt{a_0\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_n\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{a_j}}\right)^2}{\sum_{i=0}^{n}a_0\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_n},$$

等号成立的充要条件是 $a_0=a_1=a_2=\ldots=a_n$。

定理 8 a_0、a_1、a_2、…、a_n 为任意实数，且满足 $a_i+a_j>0(i,j=0,1,2,\ldots,n;i\neq j;n\ge 3)$，则

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{a_0\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_n\left(\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{a_j}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\sqrt{a_0\ldots a_{k-1}a_{k+1}\ldots a_n\sum_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\frac{1}{a_j}}-2\sqrt{a_0\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_n\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{a_j}}\right)^2}{\left(\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\sqrt{a_0\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_n\sum_{\substack{k=0\\k\neq i,j}}^{n}\frac{1}{a_ja_k}}\right)^2}$$

$$\ge(n-1)\sum_{i=0}^{n}a_0\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_n,$$

等号成立的充要条件是 $a_0=a_1=a_2=\ldots=a_n$。

与定理 5、定理 6 相比，定理 7、定理 8 并不需要 a_0、a_1、a_2、…、a_n 全为正实数，只需要满足 $a_i+a_j>0(i,j=0,1,2,\ldots,n;i\neq j;n\ge 3)$ 即可(所有变量中最多可以有一个变量为非正实数)。即

当 $a_i>0(i=0,1,2,\ldots,n)$ 时，三角形 $A_iA_jA_k(0\le j<k\le n,j\neq i,k\neq i)$ 为锐角三角形，

当 $a_i=0(i=0,1,2,\ldots,n)$ 时，三角形 $A_iA_jA_k(0\le j<k\le n,j\neq i,k\neq i)$ 为直角三角形，

当 $a_i<0(i=0,1,2,\ldots,n)$ 时，三角形 $A_iA_jA_k(0\le j<k\le n,j\neq i,k\neq i)$ 为钝角三角形。

通过构造这一类特殊的 n 维单形并利用 Cayley-Menger 行列式计算出该单形的各个几何量并代入到不同的几何不等式中，即可构造出不同的代数不等式。所构造出的代数不等式的强度与被代入的几何不等式相当。

参考文献

[1] 张晗方.关于一个单形及其子单形的内切球半径的一些几何不等式(英文)[J].数学季刊(英文),2014,29(02):215-220.

[2] 王卫东,杨晓静.联系 n 维单形的内、傍切球半径的一类关系式[J].湖北民族学院学报(自然科学版),1996,(02):3-4.

[3] 杨世国.关于单形体积的一个不等式[J].河南科技大学学报(自然科学版),2005,(01):94-96.

[4] 苏化明.关于单形二面角平分面面积的不等式[J].数学杂志,1992,(03):315-318.

[5] 林祖成.n 维单形的棱切超球[J].数学的实践与认识,1995,(04):90-93.