学生习作

对欧拉公式一个推广形式的猜想

张峻铭

（哈尔滨师范大学附属中学高二(1)班，150080）

中图分类号：O123.1 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2017)06-0018-02

笔者最近在阅读文[1]时，发现了一个有趣的命题.

命题 对于两个圆，允许一个四边形内接于第一个圆且外切于第二个圆，r_1、r_2 分别为两圆半径，d 为圆心距，则

$$\frac{1}{(r_1-d)^2}+\frac{1}{(r_1+d)^2}=\frac{1}{r_2^2}.$$

命题本身证明不难，但其逆命题是否正确呢?答案是肯定的.

下面给出证明.

逆命题 证明：圆心距为 d，半径分别为 R、r 的 $\odot O$、$\odot I$ 允许一个四边形内接于 $\odot O$ 且外切于 $\odot I$ 的充分必要条件为

$$\frac{1}{(R-d)^2}+\frac{1}{(R+d)^2}=\frac{1}{r^2}. \quad ①$$

证明 如图1，作直线 OI 与 $\odot O$ 交于点 A_1、A_3，作 A_1B_1、A_1B_4、A_3B_3、A_3B_2，分别与 $\odot I$ 切于点 B_1、B_4、B_3、B_2，A_1B_4 与 A_3B_3 交于点 A_4，A_1B_1 与 A_3B_2 交于点 A_2.

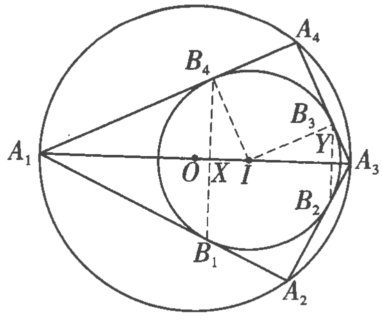

图1

充分性.

由 Poncelet 闭合定理，知四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于 $\odot O$.

联结 B_4I、B_3I，设 B_1B_4、B_2B_3 分别与 A_1A_3 交于点 X、Y.

易知，B_1B_4、B_2B_3 均与 OI 垂直，

$\angle B_4IB_3=90°$.

又 $IB_4=IB_3$，则

$\triangle IB_4X\cong\triangle B_3IY\Rightarrow IY=B_4X$

$\Rightarrow r^2=IB_4^2=IX^2+XB_4^2$

$$=IX^2+IY^2=\left(\frac{r^2}{R+d}\right)^2+\left(\frac{r^2}{R-d}\right)^2.$$

整理即得式①.

必要性.

只要证 $\angle A_1A_4A_3=90°$，即要证

$\angle B_4IB_3=90°$.

由式①得

$$IX^2+IY^2=\left(\frac{r^2}{R+d}\right)^2+\left(\frac{r^2}{R-d}\right)^2$$

$$=r^2=IB_4^2=IX^2+XB_4^2.$$

于是，$IY=B_4X$.

类似地，$IX=B_3Y$.

故 $\triangle IB_4X\cong\triangle B_3IY\Rightarrow\angle B_4IB_3=90°$.

事实上，由 Poncelet 闭合定理，其他外接圆为 $\odot O$ 且有三条边与 $\odot I$ 相切的四边形第四条边也与 $\odot I$ 相切.

至此，得到一个双心四边形的新绘法，步骤为：

(1)给出希望此双心四边形拥有的外接

收稿日期：2017-03-20

圆半径 R 与内切圆半径 r;

(2)代入式①中,解出圆心距 d;

(3)作相距 d 的两个点 O、I,并以 O 为圆心作半径为 R 的圆,以 I 为圆心作半径为 r 的圆;

(4)任意选定$\odot O$ 上一点 A,作其关于$\odot I$ 的一条切线,与$\odot I$ 交于点 B,再作 B 关于$\odot I$ 的另一条切线,与$\odot O$ 交于点 C,再作 C 关于$\odot I$ 的另一条切线,与$\odot O$ 交于点 D,四边形 $ABCD$ 即为所需双心四边形.

这种方法可以确定外接圆与内切圆半径,较常用的作垂直弦的方法好一些,但在简洁程度方面却不如作垂直弦.

至此,笔者又想到,式①将外接圆半径、内切圆半径、圆心距联系在一起,这与欧拉公式何其相似!又了解了 Fuss 也对这件事进行过研究,据说得到了 $n=5,6,7,8$ 时的公式[2].

欧拉公式 一个三角形的外接圆、内切圆的半径分别为 R、r,圆心距为 d,满足关系式

$$d^2=R^2-2Rr.$$

证明不再赘述.

由此,笔者尝试在式①中反解出 d,得到

$$d^2=R^2+r^2-\sqrt{4R^2r^2+r^4}. \qquad ②$$

将式②与欧拉公式进行对比,发现其形式的确相似.从而猜想:对于任意的 n,双心 n 边形均有一个类似的式子来将其外接圆半径 R、内切圆半径 r、圆心距 d 联系在一起.

由于偶数的形式更加特殊一些,于是,笔者先从 $n=6$ 入手,本想用类似于 $n=4$ 的方法解决,但是"直径所对圆周角为 90°"这个优势不再存在,导致 $n=4$ 时的方法失效了,后来经过思考,得到了 $n=6$ 时的式子及一个纯几何证法.

下面给出公式及证明.

公式($n=6$) 对于双心六边形,其外接圆半径 R、内切圆半径 r、两圆圆心距 d 满足关系式

$$\sqrt{1-\left(\frac{r}{R+d}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{r}{R-d}\right)^2}=1.$$

证明 如图2,作直线 OI 与$\odot O$ 交于点 A_1、A_4,作 A_1B_1、A_1B_6、A_4B_4、A_4B_3 与$\odot I$ 切于点 B_1、B_6、B_4、B_3,A_1B_1、A_4B_3、A_1B_6、A_4B_4 分别与$\odot O$ 交于点 A_2、A_3、A_6、A_5.

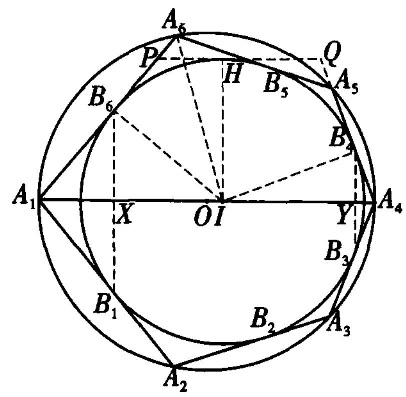

图 2

由 Poncelet 闭合定理,知六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 为双心六边形,外接圆、内切圆分别为$\odot O$、$\odot I$.

设 B_1B_6、B_3B_4 分别与 OI 交于点 X、Y.联结 IB_4、IB_6.

先证明:$A_1A_6+A_4A_5=A_1A_4$.

作 $IH\perp OI$,与$\odot I$ 交于点 H,过 H 作 $PQ/\!/OI$,分别与 A_1A_6、A_4A_5 交于点 P、Q,联结 IA_6、IQ.

由 $\angle B_6A_6I=\frac{1}{2}\angle A_1A_6A_5$

$=\frac{1}{2}(180°-\angle QA_4I)=\frac{1}{2}\angle PQA_4$

$=\angle HQI=\angle QIA_4$,

$IH=IB_6$,

知 $\triangle A_6B_6I\cong\triangle QHI$,$A_4Q=A_4I$.

故 $A_6B_6=QH=QB_4$.

类似地,$A_5B_4=PB_6$,$A_1P=A_1I$.

则 $A_1A_6+A_4A_5$

$=A_1B_6+A_6B_6+A_4B_4+A_5B_4$

(下转第 39 页)

$$\Rightarrow \ln x_1+\ln x_2=\frac{\left(1+\frac{x_1}{x_2}\right)\ln\frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2}-1}.$$

设 $t=\frac{x_1}{x_2}<1, g(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$.

则 $g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$.

故函数 $g(t)$ 在区间 $(0,1)$ 上为增函数，$g(t)<g(1)=0$.

因此,当 $0<t<1$ 时,恒有

$$\ln t<\frac{2(t-1)}{t+1}.$$

则 $\ln x_1+\ln x_2=\frac{(1+t)\ln t}{t-1}>2$

$\Rightarrow x_1x_2>e^2$.

16. 由 $C_4^3=4$,知结论等价于任取三个数作为边长,均可构成不同的三角形.

接下来用反证法证明.

若存在某三个数为边长不能构成三角形,由对称性,不妨设这三个数为 x_1、x_2、x_3,且 $x_1\geqslant x_2+x_3$.

由均值不等式知

$$\left(\sum_{i=1}^{4}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i}\right)$$

$$\geqslant 12+x_1\left(\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)+\frac{x_2+x_3}{x_1}.$$

由 $(x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)\geqslant 4$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\geqslant\frac{4}{x_2+x_3}.$$

设 $\frac{x_1}{x_2+x_3}=t(t\geqslant 1)$,得

$$\left(\sum_{i=1}^{4}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i}\right)\geqslant 12+4t+\frac{1}{t}.$$

由条件得

$$12+4t+\frac{1}{t}<17\Rightarrow 4t+\frac{1}{t}-5<0(t\geqslant 1).$$

这与 $t\geqslant 1$ 时,

$$4t+\frac{1}{t}-5=\frac{(4t-1)(t-1)}{t}\geqslant 0,$$

矛盾.

从而,原命题成立.

（黄仁寿　提供）

（上接第 19 页）

$$=A_1B_6+PB_6+A_4B_4+QB_4$$

$$=A_1P+A_4Q=A_1I+A_4I=A_1A_4.$$

接下来回到原题.

易知,

$$2R(\cos\angle A_6A_1A_4+\cos\angle A_5A_4A_1)=2R$$

$$\Rightarrow \cos\angle XB_6I+\cos\angle YB_4I$$

$$=\cos\angle A_6A_1A_4+\cos\angle A_5A_4A_1=1. \quad ③$$

将 $B_6X=\sqrt{r^2-\left(\frac{r^2}{R+d}\right)^2}$,

$$B_4Y=\sqrt{r^2-\left(\frac{r^2}{R-d}\right)^2}$$

代入式③,即得 $n=6$ 时的公式.

笔者得到此式后,便想从其中解出 d,但消去根号得到的却是关于 d^2 的四次方程. 猜想:对于双心 n 边形,R、r、d 满足关系式

$$d^2=R^2+f(n)r^2-\sqrt[n-2]{(2Rr)^{n-2}+(f(n)r^2)^{n-2}},$$

其中,$f(n)$ 的值可通过 $d=0$ 时,$r=R\cos\frac{\pi}{n}$ 解得.

同时,笔者还得到了一个 n 为偶数时的证明思路,即作出关于 OI 对称的双心 n 边形后,再对 $\angle A_nA_1A_{\frac{n}{2}+1}$ 与 $\angle A_1A_{\frac{n}{2}+1}A_{\frac{n}{2}+2}$ 之间的关系进行探究,从而,得到一个关于 $\frac{r}{R+d}$ 和 $\frac{r}{R-d}$ 的关系式.

参考文献:

[1] (美)约翰逊　著. 单墫　译. 近代欧氏几何学[M]. 哈尔滨工业大学出版社,2012,3.

[2] (德)H·德里　著. 100 个著名初等数学问题——历史和解[M]. 上海科学技术出版社,1982,8.