幂指和的排序不等式

樊益武

(西安交通大学 附属中学,陕西 西安 710048)

摘 要:利用初等方法,给出了幂指和排序不等式一个猜想的详细证明。

关键词:幂指和;排序;不等式;猜想

中图分类号:O122.3 **文献标识码**:A **文章编号**:1004-602X(2007)04-0033-02

2001 年,倪仁兴、张森国证明了幂指和的排序不等式:

设 $1/e\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$,且$\{j_1,j_2,\cdots j_n\}$是$\{1,2,\cdots,n\}$的任意的一个排列,则

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^{a_{n-k+1}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^{a_{j_k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^{a_k}\qquad(1)$$

并提出猜想:对满足条件 $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 的$\{a_k\}$也成立. 文[1]将其列为第 25 个未解决的问题,本文将给出这个猜想的证明。我们获得了如下幂指和的排序不等式:

设 $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$,且$\{j_1,j_2,\cdots j_n\}$是$\{1,2,\cdots,n\}$的任意的一个排列,则

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^{a_{n-k+1}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^{a_{j_k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^{a_k}\qquad(2)$$

为此,我们先给出几个引理。

引理 1[1,2] 设 $x>0,y>0$,则对数平均

$$S_0(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{\ln x-\ln y}&(x\neq y)\\ x&(x=y)\end{cases}$$

关于 x 或 y 为严格递增函数。

引理 2 (Ⅰ)若 $x\geqslant z\geqslant y>0$, $x\geqslant w\geqslant y>0$. 则

$$x^w+z^y\geqslant x^y+z^w\qquad(3)$$

(Ⅱ)若 $x\geqslant z>0$, $x\geqslant w>0$ 且 $x\geqslant 1$. 则

$$x^x+z^w\geqslant x^w+z^x\qquad(4)$$

(Ⅲ)若 $0<x\leqslant z<1$, $0<x\leqslant w<1$. 则

$$x^x+z^w\geqslant x^w+z^x\qquad(5)$$

证明:(Ⅰ)若 $x=z$,或 $w=y$,不等式取等号。下设 $x\neq z$ 且 $w\neq y$.

1)当 $x\geqslant 1$ 时,有

$x^w-x^y=x^y(x^{w-y}-1)\geqslant z^y(x^{w-y}-1)$

$\geqslant z^y(z^{w-y}-1)=z^w-z^y$.

从而有 $x^w+z^y\geqslant x^y+z^w$.

2)当 $0<x<1$ 时,

令 $f(t)=t^w$, $g(t)=t^y(z\leqslant t\leqslant x)$。

由 Cauchy 中值定理,知存在 $\xi\in(z,x)$,使得

$$\frac{x^w-z^w}{x^y-z^y}=\frac{w\xi^{w-1}}{y\xi^{y-1}}=\frac{w}{y}\cdot\xi^{w-y}>\frac{w}{y}\cdot y^{w-y}。$$

从而只要证$\frac{w}{y}\cdot y^{w-y}>1$,

即 $\ln w-\ln y+(w-y)\ln y>0$,

或 $1+\frac{w-y}{\ln w-\ln y}\cdot\ln y>0$。

由于$\frac{w-y}{\ln w-\ln y}$是 w 与 y 的对数平均,由引理 1 知,它关于 w 严格单调递增,所以

$$1+\frac{w-y}{\ln w-\ln y}\cdot\ln y>1+\frac{1-y}{\ln 1-\ln y}\cdot\ln y=y>0,$$

从而有 $x^w+z^y>x^y+z^w$.

(Ⅱ)可仿照(Ⅰ)证明(从略)。

收稿日期:2007-06-26

作者简介:樊益武(1957—),男,陕西西安人,西安交大附中高级教师。

(Ⅲ)当 $x=w$ 或 $x=z$ 时,不等式取等号.下设 $x\neq w$ 且 $x\neq z$,由 Cauchy 中值定理,知存在 $\xi\in(x,z)$,使得

$$\frac{x^{w}-z^{w}}{x^{x}-z^{x}}=\frac{w\xi^{w-1}}{x\xi^{x-1}}=\frac{w}{x}\cdot\xi^{w-x}>\frac{w}{x}\cdot x^{w-x}>1,$$

后一不等式可同(Ⅰ)的证明获得。注意到 $x^{x}-z^{x}<0$,

所以

$$x^{w}-z^{w}<x^{x}-z^{x},$$

即
$$x^{x}+z^{w}\geqslant x^{w}+z^{x}。$$

猜想的证明:令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k^{a_{j_k}}$,下面首先证明不等式的左边。

要证 $j_k=n-k+1(k=1,2,\cdots,n)$ 时,S_n 达到最小值 $\sum_{k=1}^{n}a_k^{a_{n-k+1}}$. 若 $j_n\neq1$,则存在某个 $j_0\neq1$,使得 a_n 与 a_{j_0} 搭配,因为 $a_n\geqslant a_{j_n}\geqslant a_1>0$, $a_n\geqslant a_{j_0}\geqslant a_1>0$,由(3)有

$$a_n^{a_1}+a_{j_0}^{j_n}\leqslant a_n^{j_n}+a_{j_0}^{a_1}。$$

上式表明,当 $j_n\neq1$ 时,调换 S_n 中的项的指数 a_1 和 a_{j_n} 的位置(其余 n-2 项不变),会使 S_n 减少.同理可证其他 a_k 必须和 a_{n-k+1} 搭配($k=1,2,\cdots,n-1$)。

其次证明不等式的右边。即要证 $j_k=k(k=1,2,\cdots,n)$ 时,S_n 达到最大值 $\sum_{k=1}^{n}a_k^{a_k}$. 若 $\{a_k\}$ 中有 $\geqslant1$ 的项,不妨设 $0<a_1\leqslant\cdots a_{i-1}<1\leqslant a_i\leqslant\cdots\leqslant a_n$.

ⅰ)若 $j_n\neq n$,则存在某个 $j_0\neq n$,使得 a_n 与 a_{j_0} 搭配,因为 $a_n\geqslant a_{j_n}>0$, $a_n\geqslant a_{j_0}>0$,且 $a_n\geqslant1$,由(4)有

$$a_n^{a_n}+a_{j_0}^{j_n}\geqslant a_n^{j_n}+a_{j_0}^{a_n}.$$

上式表明,当 $j_n\neq n$ 时,调换 S_n 中的项的指数 a_n 和 a_{j_n} 的位置(其余 $n-2$ 项不变),会使 S_n 增大.同理可证其他 a_k 与 a_k 搭配($k=i,i+1,\cdots,n-1$),相应和增大;

ⅱ)设经过ⅰ)的调整后,$a_1,a_2,\cdots,a_{i-1}$ 分别与 $a_{j'_1},a_{j'_2},\cdots,a_{j'_{i-1}}$ 搭配,(其中 $\{j'_1,\cdots,j'_{i-1}\}$ 是 $\{1,2,\cdots,i-1\}$ 的一个排列),若 $j'\neq1$,则存在某个 $j_0\neq1$,使得 a_1 与 a_{j_0} 搭配,因为 $0<a_1\leqslant a_{j_0}<1$, $0<a_1\leqslant a_{j'_1}<1$,由(5)有

$$a_1^{a_1}+a_{j_0}^{j'_1}\geqslant a_1^{j'_1}+a_{j_0}^{a_1}.$$

上式表明,当 $j'\neq1$ 时,调换相应和中的 a_1 和 $a_{j'_1}$ 的位置(其余 $n-2$ 项不变),会使和增大。同理可证其他 a_k 必须和 a_k 搭配($k=1,2,\cdots,i-1$)。

由ⅰ)、ⅱ)不等式右边得证。

注 幂指和的排序不等式可简记为:反序和≤乱序和≤同序和。

参考文献:

[1] 匡继昌.常用不等式[M].山东科学技术出版社,2004.

[2]T. P. Lin. The power mean and the logarithmic mean, Amer[J]. Monthly, 1974,81:879-883.

[责任编辑 贺小林]

幂指和的排序不等式

作者： 樊益武
作者单位： 西安交通大学,附属中学,陕西,西安,710048
刊名： 延安大学学报（自然科学版）
英文刊名： JOURNAL OF YANAN UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)
年，卷(期)： 2007,26(4)

参考文献(2条)

1. 匡继昌 常用不等式 2004

2. T.P.Lin The power mean and the logarithmic mean 1974