彭色列闭合定理的纯射影几何证明

彭连虎

摘要：本文主要通过运用帕斯卡定理以及笛沙格双三角形定理、笛沙格对合定理，证明了彭色列闭合定理，以及引入了共轴二次曲线的概念。

一、彭色列闭合定理简介

平面上给定两条二次曲线，若存在一封闭多边形外切其中一条二次曲线且内接另一条二次曲线，则此封闭多边形内接的二次曲线上每一个点都是满足这样（切、接）性质的封闭多边形的顶点，且所有满足此性质的封闭多边形的边数相同。

二、几点说明

1. 由于时间有限，我在这里仅仅讨论二次曲线为常态时的情形。也就是说，不考虑可能出现的退化二次曲线的情况。
2. 如果一条直线和二次曲线有一个交点，那么它们一定有另一个交点，当且仅当这条直线和二次曲线相切时，这两个交点重合。
3. 对于同一条二次曲线上的一个点，我们可以把它视为两点，我们把过这两点的直线定义为二次曲线在改点处的切线。
4. 如果已知直线和二次曲线的一个交点，我们说“作直线和该二次曲线的交点”指的是出已知点的另一个交点。
5. 对于上面提到的特殊情况，感兴趣的读者可以自行探究。

三、两个作图方法。

为了便于理解，我们先提出如下下面两个作图法，它们看似和彭色列闭合定理毫无联系，然而读完本文后，你会发现它们的联系如此深刻。

(一) 互逆对作图法

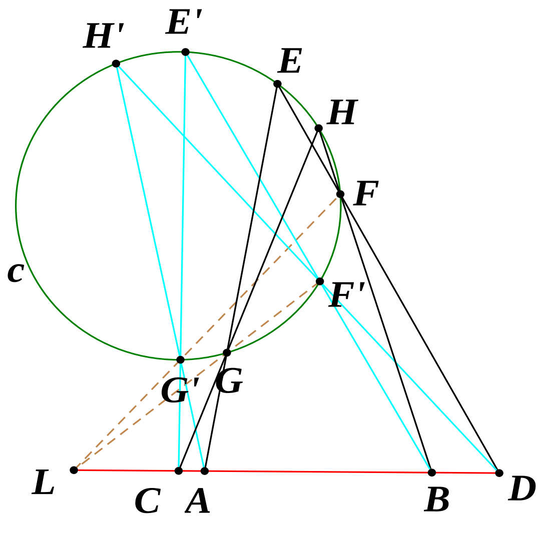
点D是直线AB上的一个定点，过D作二次曲线c的割线DEF，设直线AE、BF分别交c于G、H。设直线GH交直线AB于C，则称C为D关于点AB和二次曲线c的互逆点。

对于不同的割线$DE'F'$，我们将得到同一个点C。

证明：设 设$G'F$交GF'于L，对二次曲线内接六边形$G'FEGF'H'$运用帕斯卡定理可知L、A、D三点共线，同理可知L、C'、B三点共线

（其中C’是$E'G'$和EG的交点）。

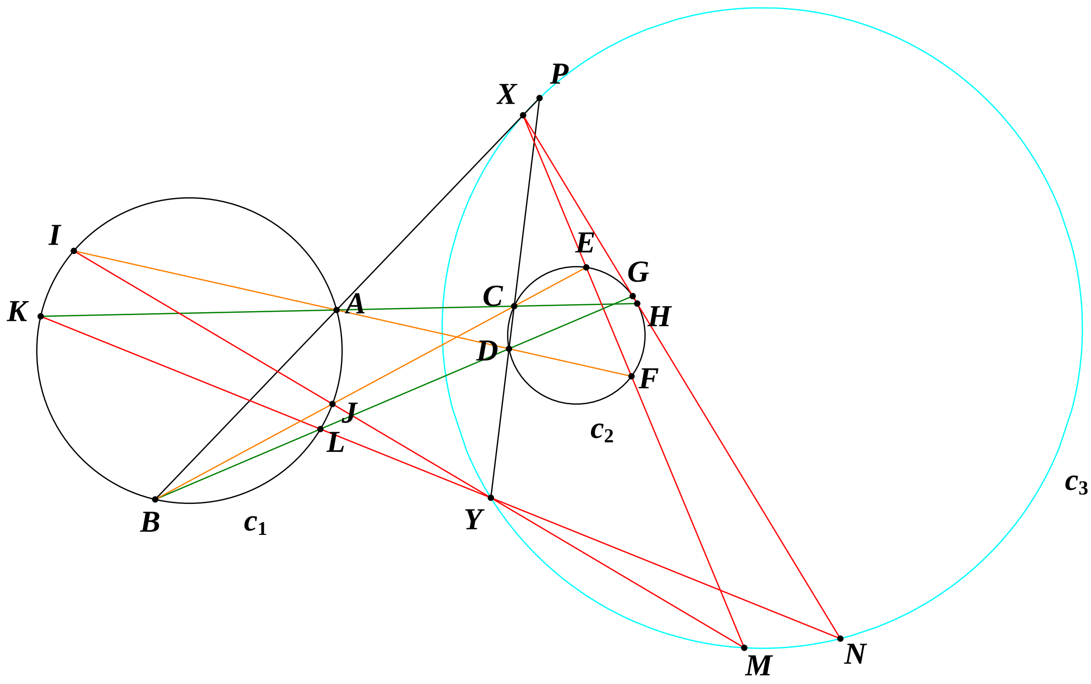
因此，C'和C重合，所以对于不同的割线，我们都能作出同一个点C。



（二）双割线作图法（笔者在几何画板里作共轴二次曲线的方法）

已知 P 是不在二次曲线 c_1、c_2 上的一点，过 P 作 c_1、c_2 的割线 PAB、PCD，设 AD、BC 分别交 c_1、c_2 于 I,J、F,E，AC、BD 分别交 c_1、c_2 于 K,L、H,G。设 IJ 交 KL 于 Y，EF 交 GH 于 X，KL交EF于M，IJ交GH于N。

那么，我们有X、Y分别在直线AB、CD上，且过P，X，Y，M，N五点的二次曲线 c_3和c_1、c_2共轴。



根据互逆对作图法，易知Y'在CD上，且是P关于CD和c_1的互逆对。

一样的，X、P关于CD和c_2互为互逆对，XN关于GH和c_1互为互逆对，XM关于EF和c_1互为互逆对，YN关于KL和c_2、YM关于IJ和c_2 互为互逆对。

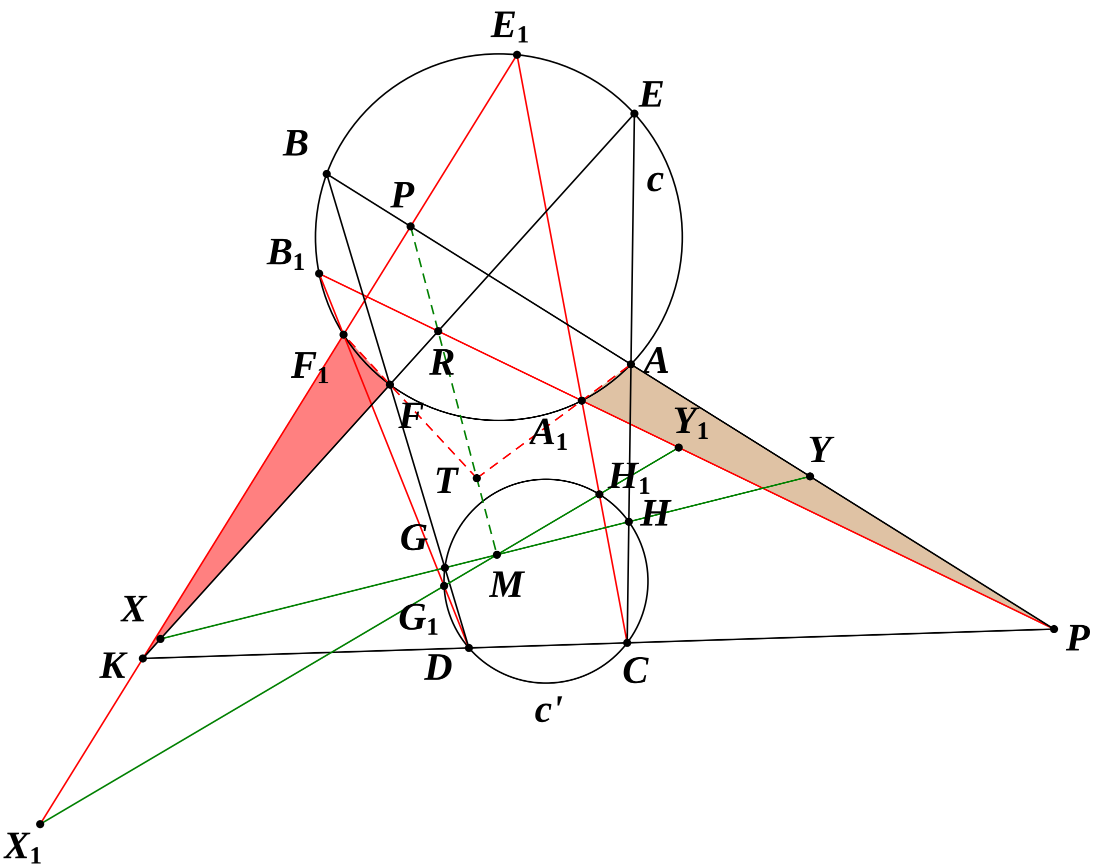
一般的，过 P作c_2的割线PQR，P关于QR和c_1的互逆点为S，则S的轨迹是二次曲线的一段，我们称这条二次曲线为和c_1c_2共轴。

至于为何 S 的轨迹是一条二次曲线，以及共轴更深的含义，下文将细细分解。

四、证明互逆点的轨迹为二次曲线

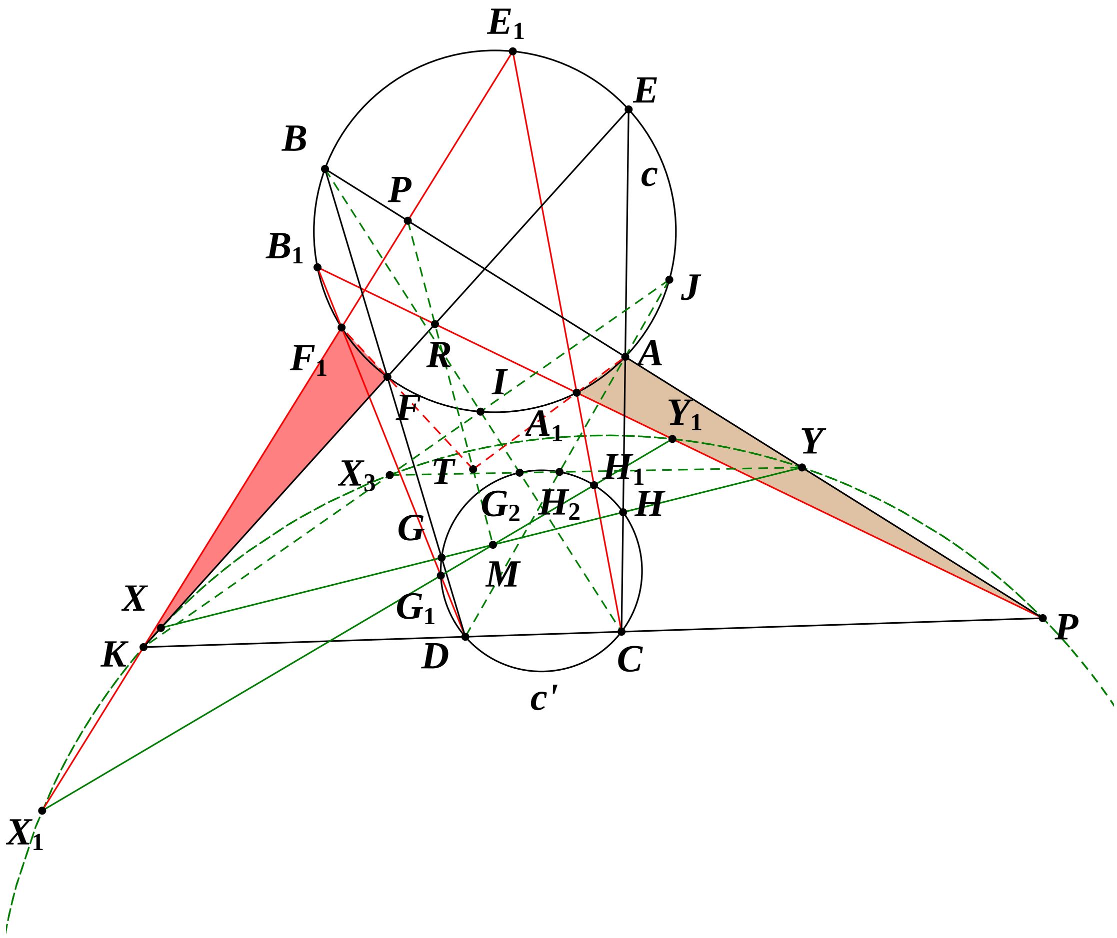
设 KP关于CD和二次曲线c_1互为互逆对。按照如下方式作出 P 关于 AB和c_2 的互逆

点Y和P关于EF和c_2的互逆点X。再用同样的方法再做出一组相应的点，只需在字母的右下角加标号 1。则我们需要证明的是X,Y,X_1,Y_1，K，P六点共二次曲线。设XY交X_1Y_1于M。由于不讨论退化二次曲线，我们这里根据帕斯卡定理的逆定理可知只需证明 P、R、M 三点共线，根据互逆对作图法中的讨论可以知道 AF_1、A_1F的交点S在直线KP上，故$\triangle F_1FK$和$\triangle AA_1P$有透视中心，因此它们有透视轴P R,T即，P，R，T三点共线。记BF和A_1E_1的交点为Q，对曲线c的内接六边形$AA_1E_1F_1FB$运用帕斯卡定理可知T，P，Q三点共线，故Q，P，T，R四点共线，同样，对$AA_1B_1F_1FE$运用帕斯卡定理，得R,T，S三点共线。综上，得Q,P，R,S共线，故P、R、M共线，所以P,K,X,Y,X_1,Y_1六点共二次曲线。



但是这并不能说明此二次曲线是固定的，因为过$KPXY$四点的二次曲线有无数条。我们还需要引入一个点来固定这条二次曲线。如下图连接CB，DA分别交c于I、J根据互逆对作图法，可知I，J，K三点共线，设G_2H_2交IJ于X_3，根据互逆对作图法可知

Y在 H_2G_2上。又根据上面的证明可知 X_3，Y，P，K，X_2,Y_2六点在一条二次曲线上，这条二次曲线和过 P,K,X,Y,X_1,Y_1六点的二次曲线有五个公共点，因此它们是同一条二次曲线，所以无论 X_1、Y_1怎么变动，它都在一条固定的二次曲线上，又因为 X，Y 和 X_1、Y_1地位相等，所以不难看出此二次曲线和 X_1、Y_1、X，Y 的位置都无关，这条曲线完全可以由 P、K 确定，而 K 可由 P 确定，所以此二次曲线可以仅由 P 确定。并且，互为互逆对的 K、P 所确定的二次曲线是同一条。



我们固定 PK 来看，Y、Y_1、Y_2……等在这条二次曲线上运动，固定 PY 来看，K、K_1、K_2……等也在这条二次曲线上。

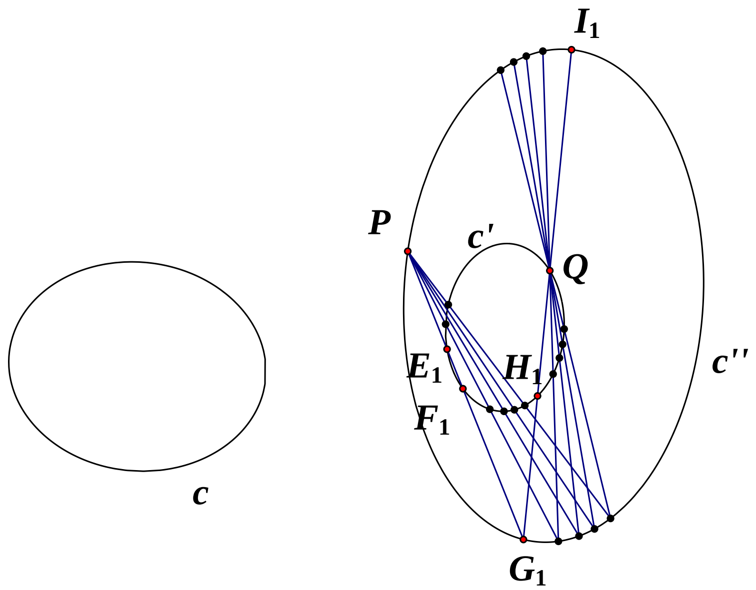
从而我们证明了:过 P 作 c的割线PUV，W为P关于UV和c’的互逆点，则 W 的轨迹是一条二次曲线，作 c'的割线PU’V’，P关于U’V’的互逆点为W’，则W’的轨迹是 同一条二次曲线（）。我们称这条二次曲线为：过 P 且与〈c，c'〉共轴的二次曲线。注意，在这里，c、c'

是用“$\langle\rangle$”来“捆绑”在一起的。这是由于我们的割线法只能作出二次曲线的一段，并不能作出整个的二次曲线。在下面的讨论中，我们将解除“捆绑”。

五、共轴二次曲线的引入（逐步解绑）

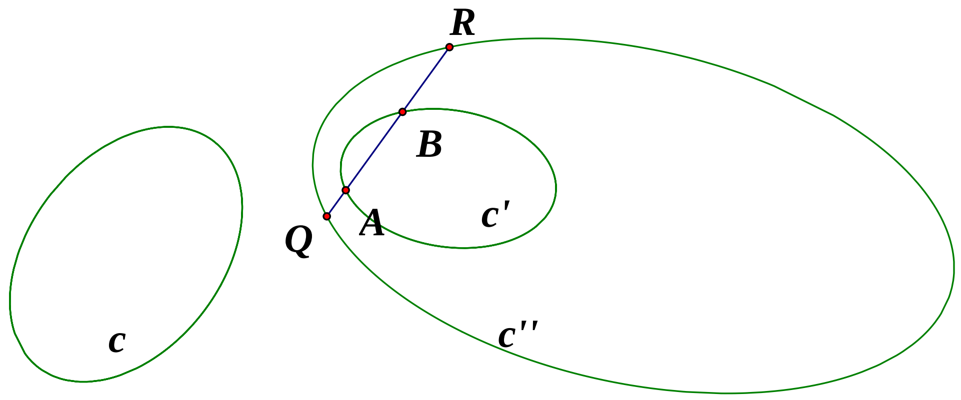
1. 若c''与$\langle c，c'\rangle$共轴，则c'与$\langle c,c''\rangle$共轴，c与$\langle c',c''\rangle$共轴，即“捆绑”不是必须的。

证明：设P是用来确定c''的点，过P作c'的割线PE_1F_1，交c''于G_1，G_1Q交c’于H_1，交c''于I_1。那么G_1是P关于E_1、F_1和c的互逆点，进而I_1是G_1关于H_1Q的互逆点，根据互逆点作图法的图形的对称性不难看出，这可以推出H_1是Q关于I_1G_1的互逆点，我们再作出H_2,H_3,H_4,H_5，即可知c’是过Q且和$\langle c,c''\rangle$共轴的二次曲线。同理可证c与$\langle c',c''\rangle$共轴。注意，Q 点可以是 c’上任意一点！



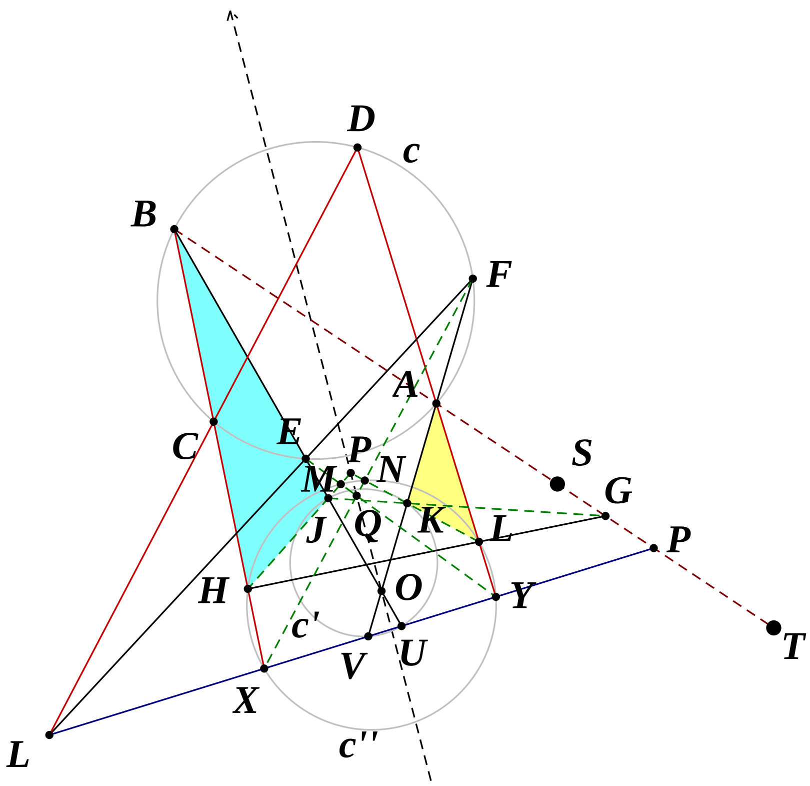
2. 设c''是过P且和$\langle c_1，c_2\rangle$共轴的二次曲线，Q是c''上任意一点，过Q作c'的割线QAB，交c''于R，则Q、R关于A、B和c互为互逆对。（初步解绑）

证明：由 1 可知B可以作为生成c'的点，所以A、B关于Q、R和c互为互逆对，即 Q、R关于A、B和c互为互逆对，至此，我们可以将c''与$\langle c，c'\rangle$共轴表述成c,c',c'共轴。



3. 若c, c',c"共轴; c,c',c'''共轴;那么c, c'',c'''共轴,c',c",c'''共轴， 即c, c',c'',c'''四条曲线共轴。（彻底解绑）

证 明 ： 我 们 在 分 别 取 c'''上的点T，过T作c的割线TAB，交c'''于点S。分别在c'、c''上取VU，作如图所示割线交ST于P。设XB、YA分别交c于C、。D，CD交XY于L，过L作c的割线LEF，设BE、FA分别交XY于U、V



FX、EY分别交c''于点N、M，直线HM、LN分别交BU、FV于J、K。

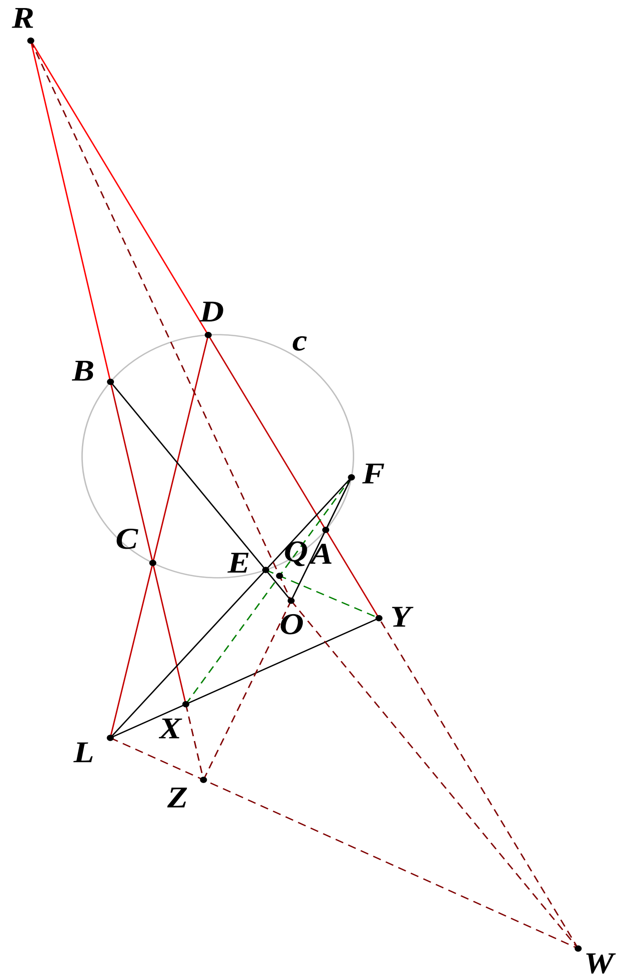
为了化简证明，我们先分块证明两个小结论：1. 如右图所示，设直线 BC 交 AD 于 R，则 R、O、Q，三点共线

证：设 BC 交 AF 于Z，BE交AD于W，

对二次曲线内接六边形CBEFAD 使用帕斯卡定理得 L，Z，W 三点共线。

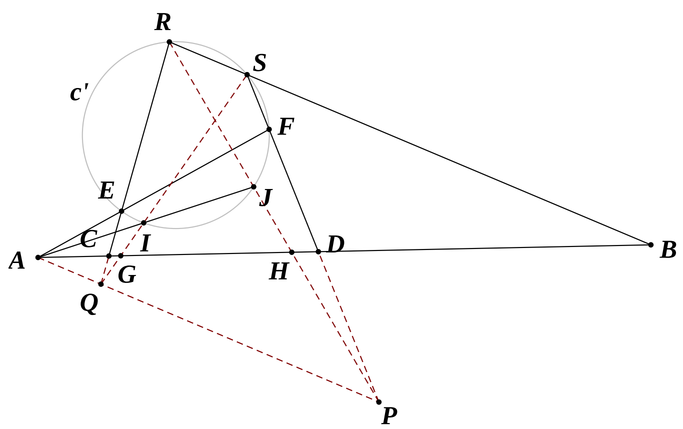
对六边形BXYAFE逆用帕斯卡定理，得B,X,Y,A,F,E六点共二次曲线

进而对六边形 $FAYEBX$ 运用帕斯卡定理，得 R、O、Q 三点共线。



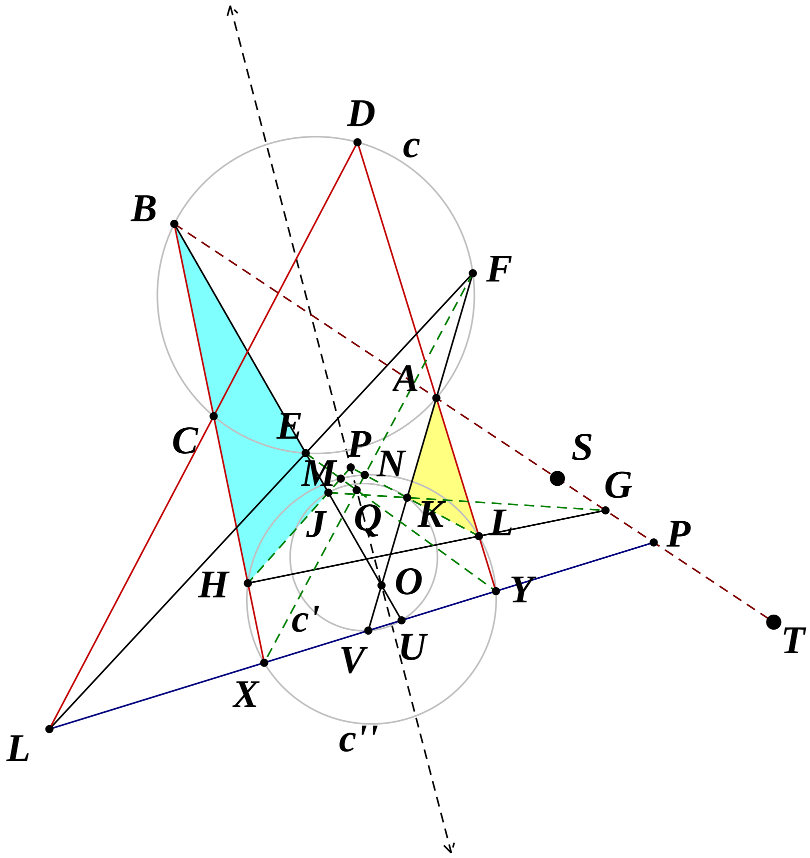
2. 若 C、D关于 A、B 和c’互为互逆对，则直线AB上的所有互逆对可以仅由C,D,A，B作出，和 c' 无关。

证明：利用互逆对作图法作出下图所示三对互对 A, B；C,D;G,H，根据帕斯卡定理可知 AQP 三点共线，则对四点形 $PQRS$ 运用笛沙格对合定理可知 I、H 仅仅由C,D,A，B作出，和 c' 无关。



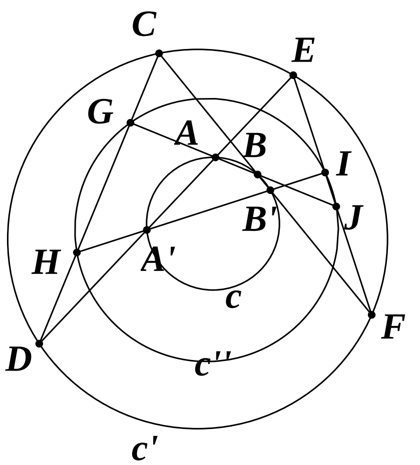
回到原图，根互逆对作图法，我们作出 M、N，使其都在曲线 c’ 上。对六边形 $MYLNXH$运用帕斯卡定理，得P、O、Q三点共线，结 合 小 结 论 1 可 知 O、R R三点共线，即△ BMH和 ANL有透视轴，故 AB J、 HL 三 线 共 点 ， 记 为 G 。 所 以 P 关 于 A、 B和 ' 的 互 逆 点 ， P关于A、B和c"的互逆点，为同一点G。根据作图，有S、T关于A、B和c'互为互逆对，运用小结论 2，可知S、T 仅仅由 A, B; G, P 确定，所以S、T也一定关于A、B和c''互为互逆对。所以，S在过T且和c，c’’共轴的二次曲线上，我再过T作出多组割线TA’B’，便得到多个点S’，这些点S’都在过T且和c，c’’共轴的二次曲线上，说明，c'''就是这条二次曲线，故c，c''，c'''共轴，进而

这四条曲线共轴。至此，我们可以知道，共轴是具有传递性的，已知共轴二次曲线中的任意两条（非退化），我们可以确定整个共轴二次曲线组。通过共轴二次曲线组中的任意两条曲线和一个已知点，就可以唯一地确定过这个点的共轴二次曲线组中的一条二次曲线。



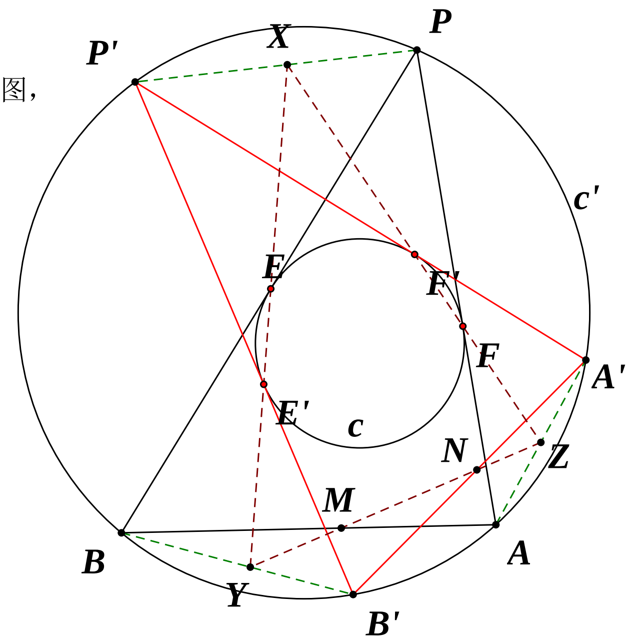
六、引理（引理的欧氏几何原型可以在《近代欧氏几何学》里面找到。）

1. 已知A、A'、B、B'是二次曲线c上的两点，AA’交二次曲线c’于D、E，BB’交c'于CF，AB交CD、EF于G、J，$A'B'$交CD、EF于H、I。则G,H,I,J四点在一条和c,c'共轴的二次曲线c''上。当A、A’重合，B、B’重合时，H、G重合，I、J重合，c''和CD、EF相切。



引理 1 的证明无需多言，因为根据互逆对作图法，这是非常显然的。在后面，我们要使用的是相切的情况。

2. P是c'上的一个动点，过P作c的切线PF、PE，其中E、F是切点。直线PE、PF分别交c'于B、A。那么直线AB和一条固定的、和c、c'共轴的二次曲线相切。



证明：不妨再作一组对应的P'、E'等，如图，设EE'交FF'于X，则根据帕斯卡定理不难看出P'、P、X三点共线，设EE'、FF'分别交BB'、AA'于Y、Z。

根据引理 1，X、Y、Z和切线PP'、BB'、AA'确定的二次曲线c''和c、c'共轴。再次运用引理1，有：M、N在同一条和c''、c'共轴的二次

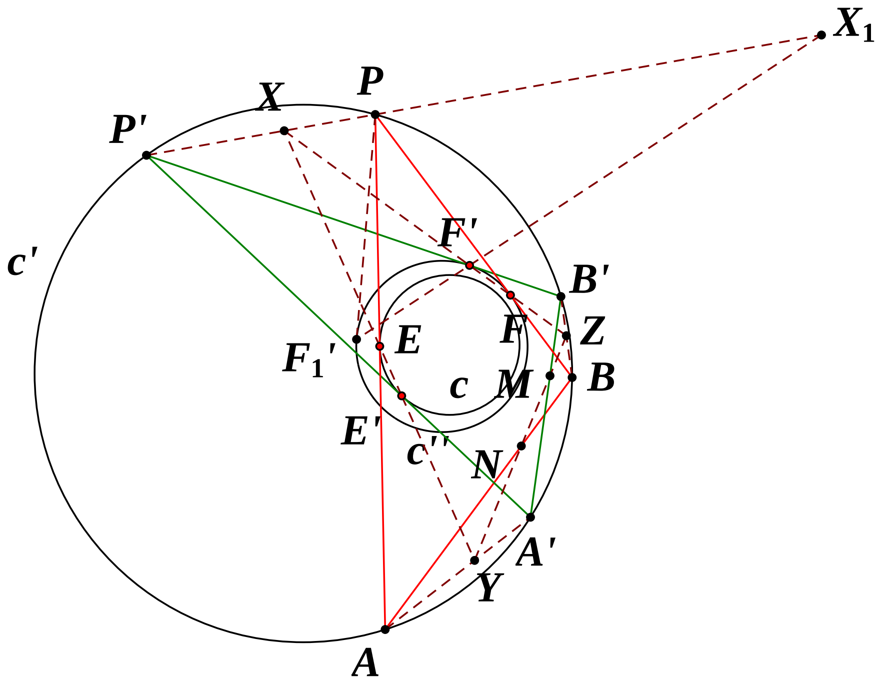
曲线c'''上。我们不妨将 M 视为定点，则动直线$A'B'$一直和c'''相切。

引理3. 已知c, c', c''三条二次曲线共轴，P是c'上的动点，PE、PF分别和c，

c'连续地相切，则AB也和共轴二次曲线组中的某一条相切。

证明：和引理 2 一样，只是我们发现 F 有两种作法，得到两种不同的 X，这两个 X 都是共轴二次曲线组中的成员在 PP’ 上的切点，根据对合有最多有两个二重点可知，其中必有一个 X 在直线 EE’ 上。但是只有一种满足连续相切的要求。我们证明在 EE’ 上的点满足要求。记另一个 X 为 X_1,

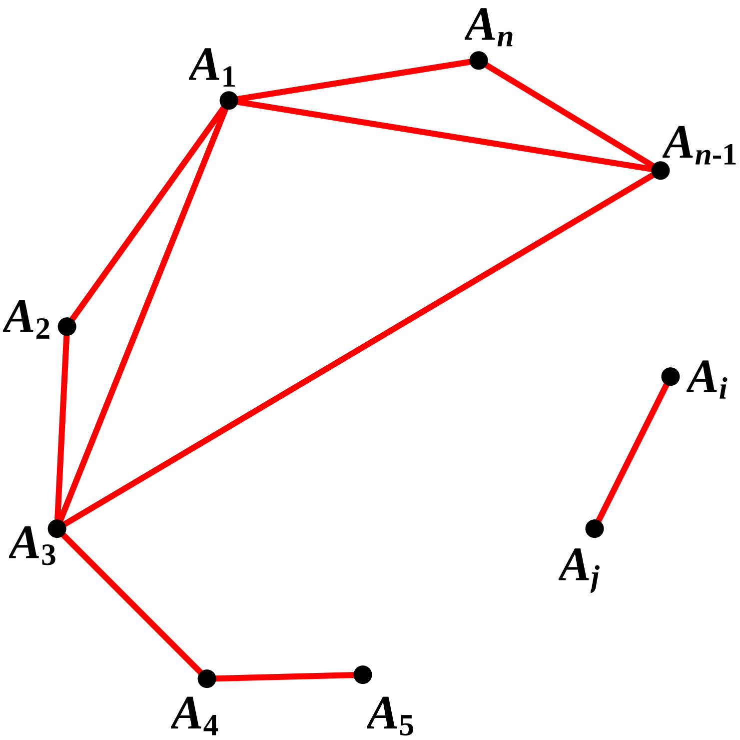
X_1不满足要求，因为当P'趋近P时，FF’趋近直线PF，而图中只有X趋近P，所以满足要求。剩下的部分同引理 2 一样，这里不再重复。



七、证明彭色列闭合定理

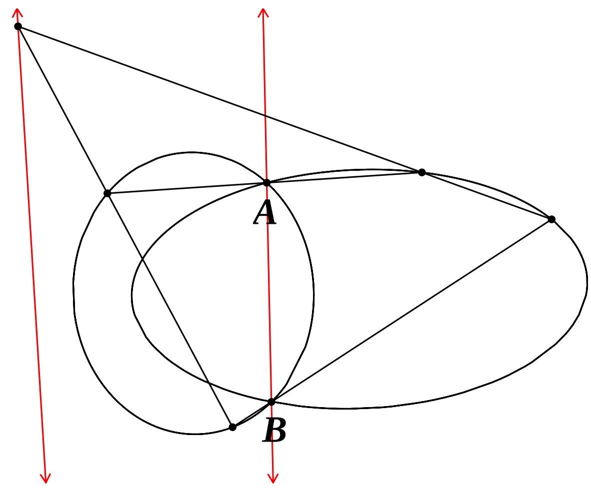
当多边形定点变动后，不妨设除了 $A_i'A_j'$ 外，其余各边都和原来的二次曲线相切，我们现在连接 $A_1'A_3'$，根据引理 2，它和 A_1A_3 切于同一条共轴二次曲线，A_1A_n和$A_1'A_n'$ 也是，再连接 A_3A_{n-1} 等等，不断这样操作下去，不断使用引理 2，最终，当我们连到

A_kA_1、A_kA_j时，由引理 2 便可得到$A_i'A_j'$和原二次曲线相切。

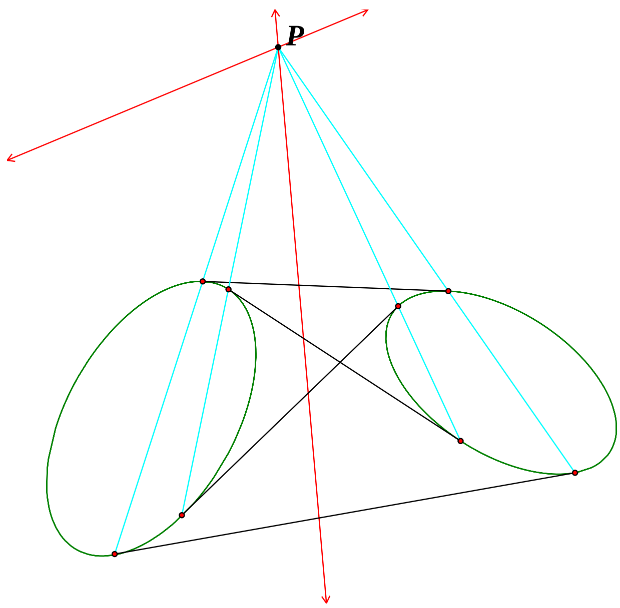


八、共轴二次曲线的根轴

1. 根轴的含义：用解析射影几何来说，就是一条二次曲线的方程加上另一条的方程的λ倍，选取适当的λ（由三次方程必有实根可知至少存在一个实数λ满足条件）使得新方程的系数的行列式等于 0，这个方程就表示两条直线。
2. 一般的，如果两二次曲线有四个交点，那么它们就有六条通过这四个点的根轴，其中两两一对。
3. 对于相切的情况，可以把切点视为两个、三个或四个重合的交点，依情况而定。
4. 对于只有两个交点的情况，我们给出如图所示的根轴的作法：



5. 对于相离的情况，我们分为内含和外离，它们之间一般有两条不同的根轴，有时也会出现根轴重合的状况。这里给出外离的曲线间的根轴（对于内含，如果它们的根轴不重合，我们可以作出与它们共轴但外离的二次曲线）的作法：



其中，两条红线是四条蓝线确定的对合里面的二重直线。

6. 与圆的根轴的联系：

（1） 相离或相交、相切的两个圆之间，有两条根轴，一条是欧氏几何里的那条普通直线，另一条是无穷远直线。

（2） 同心的两个圆之间，只有一条根轴，即无穷远直线。

（3） 我们总可以把相离或只有两个交点的两条二次曲线通过射影变换，转化成圆。