等 角 线

萧振纲

(湖南理工学院　414006)

等角线作为一个近代平面几何学的概念，它是角平分线与外角平分线概念的推广，也是角平分线与外角平分线概念的统一，并且等角线的内容早已渗透到国际国内各种数学竞赛中.

一、等角线及其基本性质

什么叫等角线？给定$\angle AOB$及它的角平分线 OT，OX、OY 是过角的顶点 O 的两条直线. 如果 OX、OY 关于直线 OT 对称的，则称 OY 是 OX 关于$\angle AOB$ 的等角线(图 1.1~1.5).

显然，OX、OY 关于$\angle AOB$ 互为等角线. 一个角的两边(所在直线)也是这个角的两条等角线；一个角的平分线是重合的等角线，即自等角线. 一个角的外角平分线也是自等角线(图 1.6).

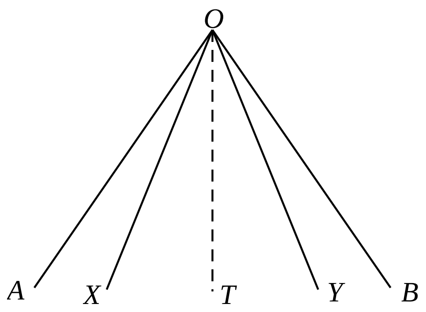

图 1.1

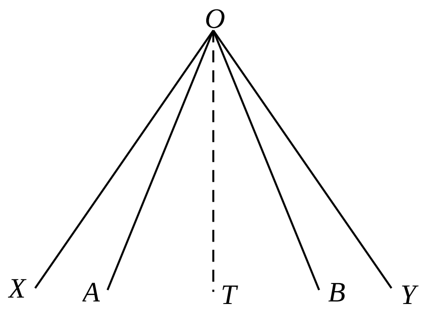

图 1.2

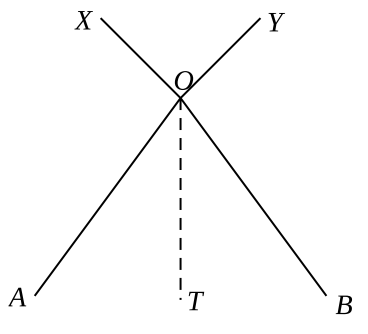

图 1.3

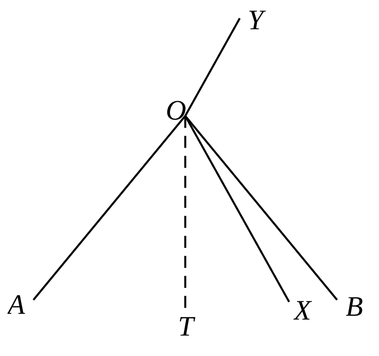

图 1.4

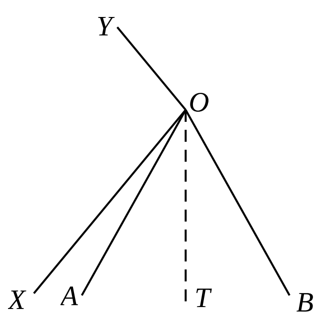

图 1.5

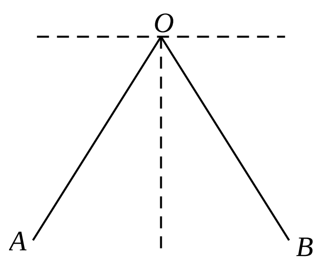

图 1.6

注意等角线中的“线”的概念是直线，因此，AX、AY 是$\angle AOB$ 的两条等角线当且仅当$\angle AOX = \angle YOB$ 或$\angle AOX + \angle YOB = 180°$.

另外，设 l 、m 是两条互相垂直的直线，垂足为 O，如果过垂足 O 的两条直线关于直线 l 对称，则不难知道，这两条直线也关于直线 m 对称. 由此可知，如果 OX、OY 是$\angle AOB$ 的两条等角线，则 OX、OY 也是$\angle AOB$ 的邻补角的两条等角线，当然也是$\angle AOB$ 的对顶角的两条等角线. 如图 1.7、图 1.8 所示，设 OC、OD 分别是 OA、OB 的反向延长线，OX、OY 是$\angle AOB$ 的两条等角线，则 OX、OY 是$\angle DOA$ 的两条等角线，也是$\angle BOC$ 的两条等角线，同时还是$\angle COD$ 的两条等角线.

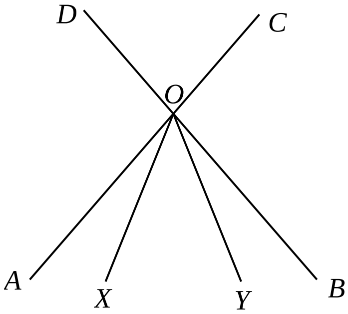

图 1.7

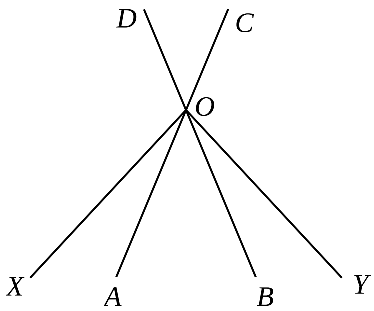

图 1.8

与等角线密切相关的另一个概念是逆平行线.

给定$\triangle ABC$，B'、C'分别是直线 AC、AB 上的点，若 B、C、B'、C'四点共圆，则 $B'C'$称为 BC 的逆平行线(图 1.9~1.11). 过点 A 且与$\triangle ABC$ 的外接圆相切的直线也称为 BC 的逆平行线(图 1.12). 显然，BC 的所有逆平行线都是平行的，因而对$\triangle ABC$ 所在平面上的任意一点，存在 BC 的唯一一条逆平行线.

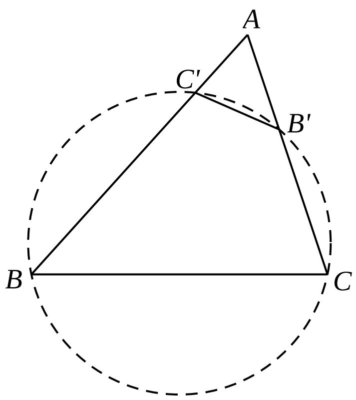

图 1.9

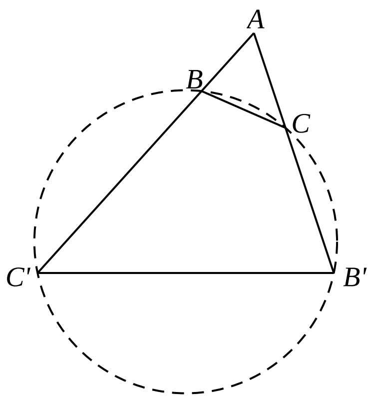

图 1.10

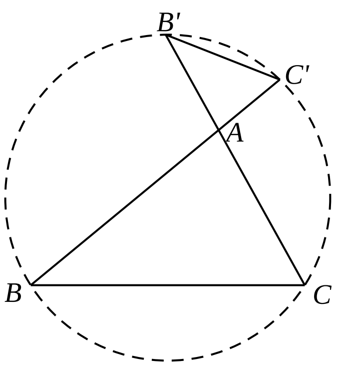

图 1.11

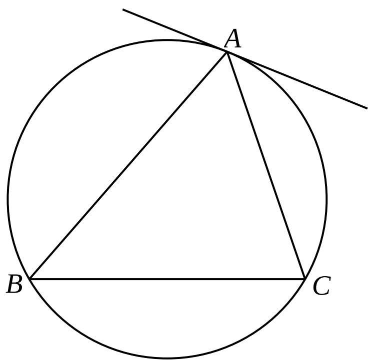

图 1.12

逆平行线是对于一个给定的三角形(或两条相交直线)而言的，离开了三角形就变得毫无意义．另外，逆平行线有时是指一条直线，有时是指端点在三角形的两边所在直线上的一条线段．

定理 1.1 设 P 是$\angle AOB$ 所在平面上一点，过 P 作直线 OA、OB 作垂线，垂足分别为 M、N，则 OQ 是 OP 关于$\angle AOB$ 的等角线的充分必要条件是: $OQ\perp MN$.

证明 如图 1.13 ~1.15 所示．设直线 AQ 与 MN 交于点 K．因 $PM\perp OM$, $PN\perp ON$，所以, O、M、P、N 四点共圆，因此，$\angle ONK=\angle OPM$．又 $PM\perp OM$，于是，OC、OD 是$\angle AOB$ 的两条等角线 $\Leftrightarrow\angle KON=\angle MOP\Leftrightarrow\triangle OKN\backsim\triangle OMP\Leftrightarrow\angle NKO=\angle PMO\Leftrightarrow\angle NKO=90°\Leftrightarrow OK\perp MN\Leftrightarrow OQ\perp MN$.

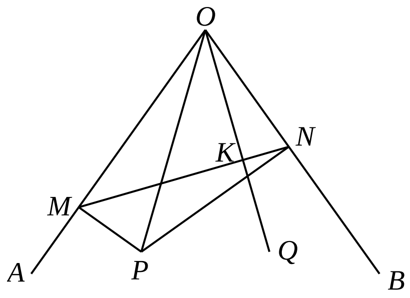

图 1.13

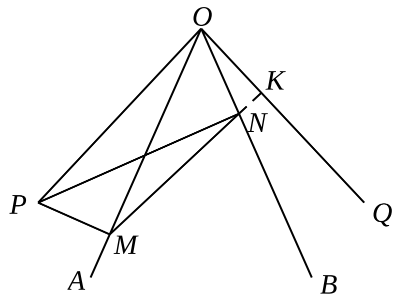

图 1.14

注意在定理 1.1 中, OP 实际上是$\triangle OMN$ 的外接圆的直径，因而定理 1.1 蕴含了三角形的一个等角线的基本事实(图 1.16、图 1.17).

推论 1.1 设 O 是$\triangle ABC$ 的外心, AD 是$\triangle ABC$ 的高，则 AO、AD 是$\angle BAC$ 的两条等角线.

推论 1.1 也可以叙述为：设 O 是$\triangle ABC$ 的外心，则 AO 关于$\angle BAC$ 的等角线垂直于 BC．或者叙述为：设 AD 是$\triangle ABC$ 的高，则 AD 关于$\angle BAC$ 的等角线过$\triangle ABC$ 的外心.

显然，当 AD 是$\triangle ABC$ 的高时, AD 的等角线垂直于 BC 的逆平行线，于是由推论 1.1 立即得到

推论 1.2 设 O 是$\triangle ABC$ 的外心，则 AO 垂直于 BC 的逆平行线.

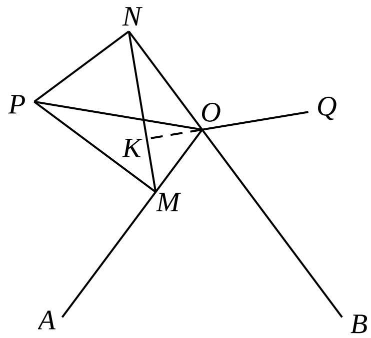

图 1.15

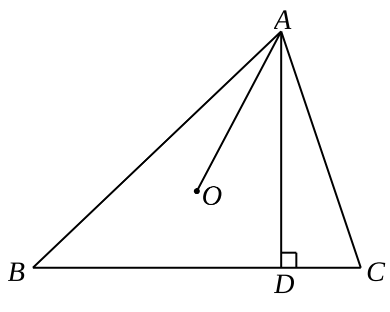

图 1.16

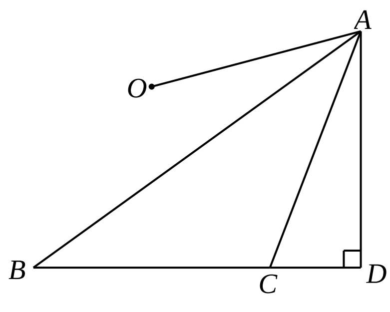

图 1.17

定理 1.2 设 M、M 是$\triangle ABC$ 的边 BC 所在直线上两点，则 AM、AN 是$\angle BAC$ 的两条等角线的充分必要条件是: $\dfrac{BM\cdot BN}{MC\cdot NC}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$.

证明 如图 1.18~1.20 所示，设直线 AM 与过点 B 且平行于 AC 的直线交于 P，直线 AN 与过点 C 且平

行于 AB 的直线交于 Q, 则 $\angle PBA=\angle QCA$, $\dfrac{BM}{MC}=\dfrac{BP}{AC}$, $\dfrac{BN}{NC}=\dfrac{AB}{CQ}$. 于是, $\dfrac{BM\cdot BN}{MC\cdot NC}=\dfrac{AB\cdot BP}{AC\cdot CQ}$. 故 $\dfrac{BM\cdot BN}{MC\cdot NC}=\dfrac{AB^2}{AC^2}\Leftrightarrow\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BP}{CQ}\Leftrightarrow\triangle ABP\backsim\triangle ACQ\Leftrightarrow\angle BAP=\angle QAC\Leftrightarrow AM$、$AN$ 是 $\angle BAC$ 的两条等角线.

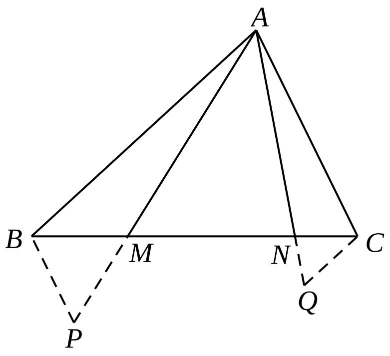

图 1.18

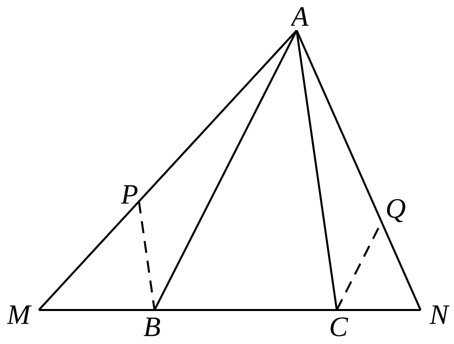

图 1.19

定理 1.3 设 D、E 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上两点, 且 AD、AE 是 $\angle BAC$ 的两条等角线. 直线 AD 与 $\triangle ABC$ 的外接圆的另一交点为 F, 则 $AE\cdot AF=AB\cdot AC$.

证明 如图 1.21 所示, 显然, $\angle AFB=\angle ACE$. 而 AE、AF 是 $\angle BAC$ 的两条等角线, 所以 $\angle BAF=\angle EAC$, 因此, $\triangle ABF\backsim\triangle ADC$, 于是 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AE}{AC}$. 故 $AB\cdot AC=AD\cdot AF$.

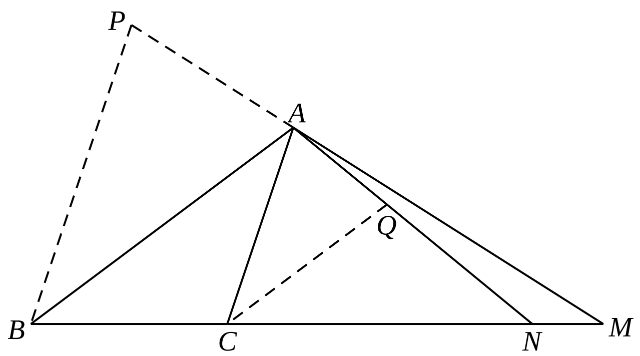

图 1.20

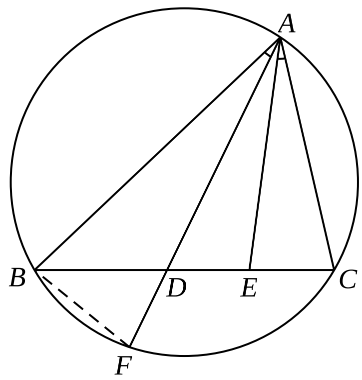

图 1.21

等角线的这几个基本性质尽管简单(定理 1.3 的证明简单得不值一提), 但由这些基本性质可以简捷地处理平面几何中的一些等角线问题. 尤其是与三角形的外心有关的许多问题都可以考虑用定理 1.1 的两个推论处理.

例 **1.1**. 设 M、N 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上两点, 且 $\angle BAM=\angle NAC$, O、O_1 分别是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AMN$ 的外心. 求证: A、O、O_1 三点共线. (全国高中数学联赛, 2012)

证明 如图 1.22 所示. 因 $\angle BAM=\angle NAC$, 所以, AM、AN 是 $\angle BAC$ 的两条等角线. 作 $\triangle ABC$ 的高 AD, 则由推论 1.1, AO_1 是 AD 关于 $\angle MAN$ 的等角线, 所以 AO_1 是 AD 关于 $\angle BAC$ 的等角线. 再由推论 1.1, AO 也是 AD 关于 $\angle BAC$ 的等角线, 故 A、O、O_1 三点共线.

例 **1.2** 设四边形 $ABCD$ 内接于圆 O, 对角线 AC 与 BD 交于 P, $\triangle ABP$、$\triangle BCP$、$\triangle CDP$、$\triangle DAP$ 的外心分别为 O_1、O_2、O_3、O_4. 求证: OP、O_1O_3、O_2O_4 三直线共点. (全国高中数学联赛, 1990)

证明 如图 1.23 所示. 因 CD 是 AB 的逆平行线, 由推论 1.2, $PO_1 \perp CD$. 又 $O_3O \perp CD$, 所以, $PO_1 /\!/ O_3O$. 同理, $PO_3 /\!/ O_1O$, 因此, PO_1OO_3 是一个平行四边形, 于是, O_1O_3 过 OP 的中点. 同理, O_2O_4 也过 OP 的中点. 故 OP、O_1O_3、O_2O_4 三直线共点.

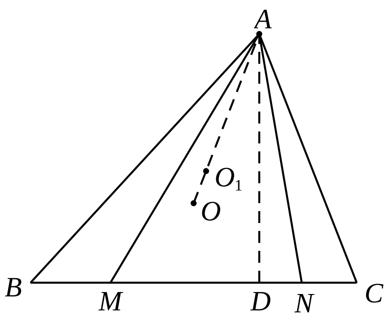

图 1.22

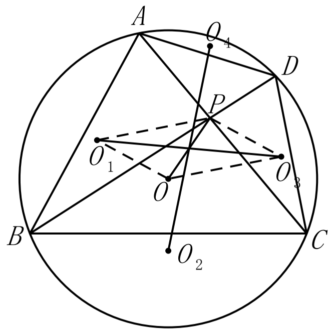

图 1.23

例 **1.3** 设 D、E 是$\triangle ABC$ 的边 BC 上两点, 且$\angle BAD = \angle EAC$, 作 $EM \perp AB$, $EN \perp AC$ (M、N 为垂足), 延长 AD 交$\triangle ABC$ 的外接圆于 F. 证明: 四边形 $AMFN$ 与$\triangle ABC$ 的面积相等. (全国高中数学联赛, 2000)

证明 如图 1.24 所示. 因 $EM \perp AB$, $EN \perp AC$, 由定理 1, $AF \perp MN$, 所以, $S_{AMDN} = \frac{1}{2} AF \cdot MN$. 再由 $EM \perp AB$, $EN \perp AC$ 知, A、M、E、N 四点共圆, 且 AE 是该圆的一条直径, 由正弦定理, 有 $MN = AE \sin \angle BAC$. 但由定理 1.3, $AE \cdot AF = AB \cdot AC$. 故

$$S_{AMFN} = \frac{1}{2} AF \cdot MN = \frac{1}{2} AF \cdot AE \sin \angle BAC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = S_{\Delta ABC}.$$

例 **1.4** 设 O 是$\triangle ABC$ 的外心, K 是$\triangle BOC$ 的外心, 直线 AB、AC 分别交$\triangle BOC$ 的外接圆于另一点 M、N, L 是点 K 关于直线 MN 的对称点. 求证: $AL \perp BC$. (第 26 届俄罗斯数学奥林匹克, 2000)

证明 如图 1.25 所示. 因$\angle OMA = \angle OCB = 90° - \angle BAC$, 即$\angle OMA + \angle BAN = 90°$, 所以 $MO \perp AN$. 同理, $NO \perp AM$, 这说明 O 为$\triangle AMN$ 的垂心, 于是$\triangle OMN$ 的外接圆与$\triangle AMN$ 的外接圆是等圆, 它们关于直线 MN 对称. 由于 K 为$\triangle OMN$ 的外心, 所以, L 为$\triangle AMN$ 的外心, 由推论 1.1, AL、AO 是$\angle BAC$ 的两条等角线, 但 O 为$\triangle ABC$ 的外心, 故再由推论 1.1 即知 $AL \perp BC$.

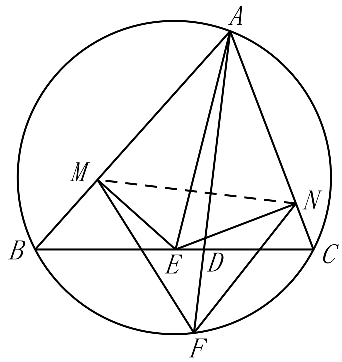

图 1.24

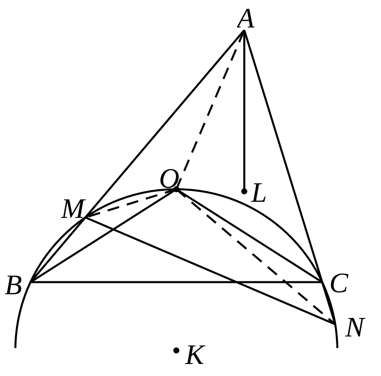

图 1.25

例 **1.5** 设 $ABCD$ 是一个圆内接四边形, $\angle CBA$ 的外角平分线与$\angle BAD$ 的外角平分线及$\angle DCB$ 的外角平分线分别交于 K、L, $\angle ADC$ 的外角平分线与$\angle DCB$ 的外角平分线及$\angle BAD$ 的外角平分线分别交于 M、N. 求证: K、L、M、N 四点共圆, 且这个圆的半径 $R = \dfrac{KM \cdot LN}{AB + BC + CD + DA}$.

证明 如图 1.26 所示. 设 $\angle BAD=2\alpha$，$\angle CBA=2\beta$，$\angle DCB=2\gamma$，$\angle ADC=2\delta$，则

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=180^\circ.$$

因 $\angle KAB=90^\circ-\alpha$，$\angle ABK=90^\circ-\beta$，所以，$\angle LKN=\alpha+\beta$. 同理，$\angle NML=\gamma+\delta$. 因此

$$\angle LKN+\angle NML=\alpha+\beta+\gamma+\delta=180^\circ.$$

故 K、L、M、N 四点共圆.

另一方面，设直线 AB 与 CD 交于 P，直线 BC 与 DA 交于 Q，则 K 是$\triangle QAB$ 的 Q-旁心，M 是$\triangle QCD$ 的内心，所以点 K、M 皆在$\angle AQB$ 的平分线上. 同理，点 L、N 皆在$\angle BPC$ 的平分线上. 因而 $KM\perp LN$. 于是，设 O 为 K、L、M、N 四点所共之圆的圆心，则由推论 1.1，$\angle LKO=\angle MKN$，即$\angle BKO=\angle MKA$. 又 K 是$\triangle QAB$ 的 Q-旁心，所以，$\triangle KAB$ 的外心在 KQ 上，再由推论 1.1，$OK\perp AB$. 同理，$OL\perp BC$，$OM\perp CD$，$ON\perp DA$. 于是，由 $S_{OAKB}+S_{OBLC}+S_{OCMD}+S_{ODNA}=S_{KLMN}$，得

$$OK\cdot AB+OL\cdot BC+OM\cdot CD+ON\cdot DA=KM\cdot LN.$$

而 $OK=OL=OM=ON=R$，故 $R=\dfrac{KM\cdot LN}{AB+BC+CD+DA}$.

例 **1.6** 设四边形 $ABCD$ 的两组对边的延长线分别交于 E、F，$\triangle BEC$ 的外接圆与$\triangle CFD$ 的外接圆交于 C、P 两点，则$\angle BAP=\angle CAD$ 的充分必要条件是 $BD\,/\!/\,EF$. (第 51 届 IMO 中国国家集训队测试, 2010)

证明 如图 1.27 所示. 因完全四边形的四个三角形的外接圆共点，所以，$\triangle AED$ 的外接圆 Γ_1 与$\triangle ABF$ 的外接圆 Γ_2 交于 A、P 两点. 设直线 AP 与 BC 交于 K，BC 与 Γ_1、Γ_2 的另一个交点分别为 M、N，则由圆幂定理，$EK\cdot MK=KP\cdot KA=KF\cdot KN$. 两边同加上 $EK\cdot KF$ 即得 $EK\cdot MF=KF\cdot EN$，故 $\dfrac{EK}{KF}=\dfrac{EN}{MF}$.

又因圆 Γ_1、Γ_2 分别过 A、D 两点和 A、B 两点，由圆幂定理，$EN\cdot EF=BE\cdot AE$，$MF\cdot EF=AF\cdot DF$，所以，$\dfrac{EN}{MF}=\dfrac{AE\cdot BE}{AF\cdot DF}$，因此 $\dfrac{EK}{KF}=\dfrac{AE\cdot BE}{AF\cdot DF}$.

另一方面，设直线 AC 与 EF 交于 L，则由 Ceva 定理可得，$\dfrac{EL}{LF}=\dfrac{AD}{DF}\cdot\dfrac{BE}{AB}$，所以

$$\frac{EL}{LF}\cdot\frac{EK}{KF}=\frac{AE}{AF}\cdot\frac{AD}{AB}\cdot\frac{BE^2}{DF^2}.$$

于是，由定理 1.2，

$$\begin{aligned}\angle BAP=\angle CAD&\Leftrightarrow\frac{EL}{LF}\cdot\frac{EK}{KF}=\frac{AE^2}{AF^2}\Leftrightarrow\frac{AE}{AF}\cdot\frac{AD}{AB}\cdot\frac{BE^2}{DF^2}=\frac{AE^2}{AF^2}\\&\Leftrightarrow\frac{BE^2}{DF^2}=\frac{AE}{AF}\cdot\frac{AB}{AD}\Leftrightarrow\frac{(AE-AB)^2}{(AF-AD)^2}=\frac{AE\cdot AB}{AF\cdot AD}\\&\Leftrightarrow\frac{(AE-AB)^2+2AE\cdot AB}{(AF-AD)^2+2AF\cdot AD}=\frac{AE\cdot AB}{AF\cdot AD}\\&\Leftrightarrow\frac{(AE+AB)^2}{(AF+AD)^2}=\frac{AE\cdot AB}{AF\cdot AD}\\&\Leftrightarrow\frac{(AE+AB)^2}{(AF+AD)^2}=\frac{(AE-AB)^2}{(AF-AD)^2}\\&\Leftrightarrow\frac{AE+AB}{AF+AD}=\frac{AE-AB}{AF-AD}\\&\Leftrightarrow\frac{(AE+AB)+(AE-AB)}{(AF+AD)+(AF-AD)}=\frac{(AE+AB)-(AE-AB)}{(AF+AD)-(AF-AD)}\\&\Leftrightarrow\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AD}\Leftrightarrow BD\,/\!/\,EF.\end{aligned}$$

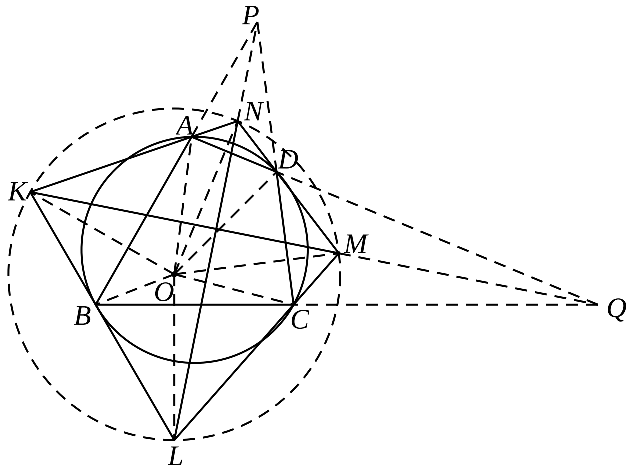

图 1.26

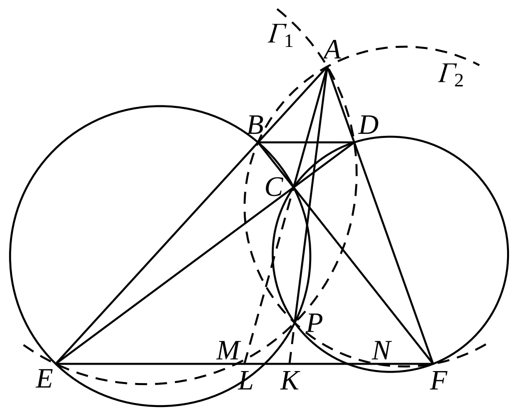

图 1.27

二、平行四边形与等角线

平行四边形与等角线有着密切的联系.

定理 **2.1** 设 P 是平行四边形 $ABCD$ 所在平面上一点, 则$\angle PAD=\angle DCP$ 的充分必要条件为: PB、PD 是$\angle APC$ 的两条等角线. 其中$\angle PAD$ 与$\angle DCP$ 的方向相同.

证明 如图 2.1、2.2 所示. 作平移变换$T(\overrightarrow{AD})$, 则 $A\to D$, $B\to C$. 设 $P\to P'$, 则$\angle DP'P=\angle PAD$, $\angle APB=\angle DP'C$. 于是,$\angle PAD=\angle DCP\Leftrightarrow\angle DP'P=\angle DCP\Leftrightarrow C$、$P'$、$D$、$P$ 四点共圆 $\Leftrightarrow\angle DP'C+\angle CPD=180°$或$\angle DP'C=\angle DPC\Leftrightarrow\angle APB+\angle CPD=180°$或$\angle APB=\angle DPC\Leftrightarrow PB$、$PD$ 是$\angle APC$ 的两条等角线.

图 31

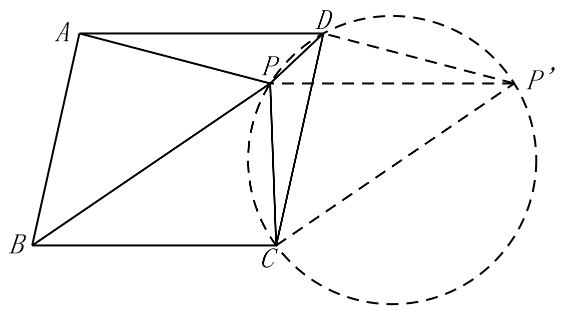

图 2.1

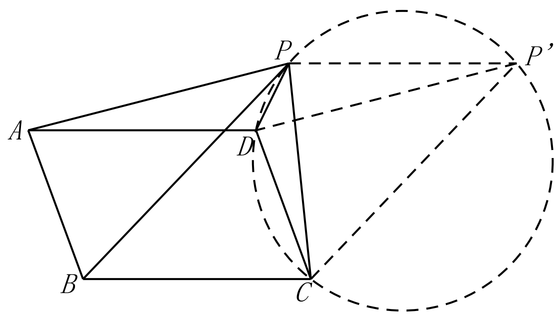

图 2.2

图 2.1 所示情形的必要性是 1997 年第 29 届加拿大数学奥林匹克试题; 图 2.2 所示情形的必要性是 1978 年第 12 届前全苏奥林匹克试题, 也是 2013 年第 49 届英国数学奥林匹克试题.

因为定理 2.1 所揭示的是平行四边形与等角线定理的一个关系, 所以我们将其称为平行四边形等角线定理. 它在以往只是以两道简单小题的身份隐没在茫茫题海之中, 但实际上, 这个定理的应用是非常广泛的, 不可小觑.

例 2.1 设$\triangle OAB$ 与$\triangle OCD$ 镜像相似, 直线 AB 与 CD 交于 P, L、M、N 分别是 OP、AC、BD 的中点. 求证: L、M、N 三点共线.

证明 如图 2.3、图 2.4 所示, 设点 O 关于 M、N 的对称点分别为 Q、R, 则 $OAQC$、$OBRD$ 皆为平行四边形. 因$\triangle OAB\backsim\triangle OCD$, 所以$\angle PAO=\angle OCP$, $\angle PBO=\angle ODP$, 由定理 2.1, PQ 是 PO 关于$\angle CPA$ 的等

角线, PR 也是 PO 关于$\angle CPA$ 的两条等角线, 因此, P、Q、R 三点共线. 而 L、M、N 分别为 OP、OQ、OR 的中点, 故 L、M、N 三点共线.

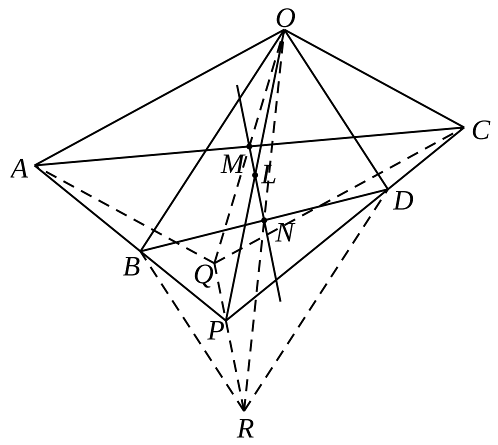

图 2.3

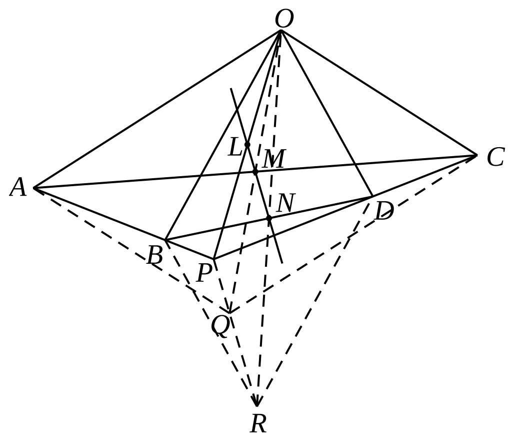

图 2.4

例 **2.2** 已知 $ABCD$ 是一个圆内接四边形, 对角线 AC 与 BD 交于点 E, 直线 DA 与 BC 交于点 F, 四边形 $EDGC$ 是平行四边形, H 是 E 关于 DF 对称点. 求证: D、H、F、G 四点共圆. (第 54 届 IMO 摩尔多瓦国家代表队选拔考试, 2013)

证明 如图 2.5 所示. 因 $DECG$ 是一个平行四边形, $\angle FDE=\angle ECF$, 由定理 2.1, FE、FG 是$\angle CFD$ 的两条等角线, 所以$\angle EFD=\angle CFG$. 又 H 是 E 关于 DF 对称点, 四边形 $ABCD$ 内接于圆, 所以$\angle DFH=\angle EFD=\angle CFG$, $\angle HDF=\angle FDE=\angle ACF$. 于是, 设 X 是 FH 的延长线上一点, FG 与 AC 交于 Y, 则

$$\angle DHX=\angle DFH+\angle HDF=\angle CFG+\angle ACF=\angle AYF.$$

再注意 $AC /\!/ DG$ 即知$\angle AYF=\angle DGF$, 因此, $\angle DHX=\angle DGF$. 故 D、H、F、G 四点共圆.

例 **2.3** 在圆内接四边形 $ABCD$ 中, 直线 AB 与 CD 交于 E, 对角线 AC 与 BD 交于 F, 作平行四边形 $ABDX$. 求证: $\angle DCX=\angle FEA$. (中欧地区数学竞赛, 2010)

证明 如图 2.6 所示. 设过点 D 且平行于 AC 的直线与 AX 交于 Y, 则 $AFDY$ 是一个平行四边形, 而$\angle EAF=\angle FDE$, 由定理 2.1, $\angle DEY=\angle FEA$. 再设直线 CD 与 AX 交于 Z, 则$\angle YZD=\angle BDC=\angle EAF$, 因此, $\triangle EFA\backsim\triangle EYZ$, 从而 $\dfrac{EA}{FA}=\dfrac{EZ}{YZ}$.

另一方面, 因$\angle AZD=\angle BDC=\angle EAC$, 所以, $EC\cdot EZ=EA^2$. 又由 $ABDX$ 与 $AFDY$ 皆为平行四边形知, $\angle BAF=\angle XDY$, 且 $DY=FA$, 所以 $\angle XZD=\angle BDC=\angle BAF=\angle XDY$, 因此, $YX\cdot YZ=YD^2=FA^2$. 于是, $\dfrac{EC\cdot EZ}{YX\cdot YZ}=\dfrac{EA^2}{AF^2}=\dfrac{EZ^2}{YZ^2}$, 从而 $\dfrac{EC}{YX}=\dfrac{EZ}{YZ}$, 这说明 $CX /\!/ EY$, 故$\angle DCX=\angle DEY=\angle FEA$.

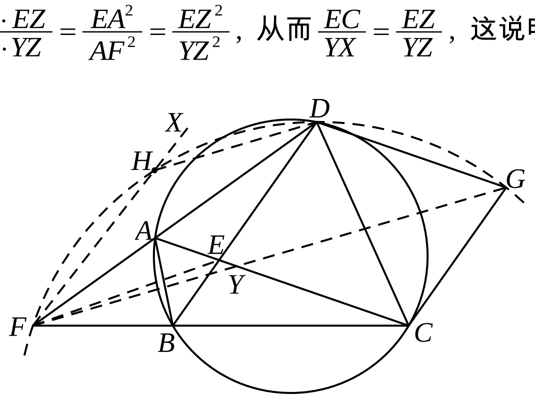

图 2.5

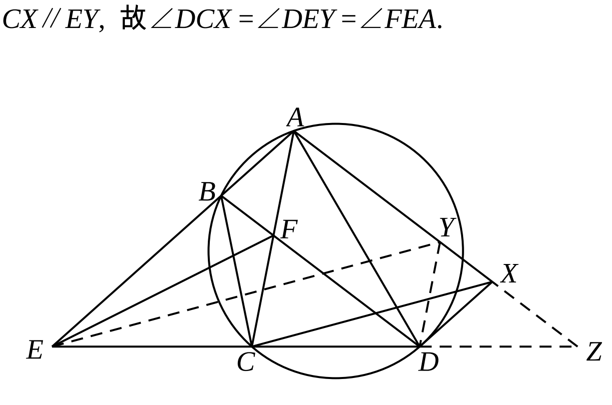

图 2.6

例 **2.4** 设 P 是$\triangle ABC$ 内一点, 且$\angle ACP=\angle PBA$. 点 P 在$\angle A$ 的内角平分线与外角平分线上的射影分别为 E、F. 求证: 直线 EF 平分 BC.

证明 如图 2.7 所示. 设 M 是 BC 的中点, 点 P 关于点 M 的对称点为 Q, 则 $PBQC$ 是一个平行四边形. 而$\angle PBA=\angle ACP$, 由定理 2.1, AP、AQ 是$\angle BAC$ 的两条等角线. 但 AE 是$\angle BAC$ 的平分线, 因而 AE 也是$\angle QAP$ 的平分线. 又 $AE\perp EP$, 于是, 设直线 PE 与 AQ 交于 K, 则 E 为 PK 的中点. 再设 N 是 PA 的中点, 则 M、E、N 三点共线. 显然, E、N、F 三点共线, 故 E、F、M 三点共线, 换句话说, 直线 EF 平分 BC.

例 2.1 所述也是一个有应用价值的几何事实, 值得注意.

例 **2.5**. 设 H 是锐角$\triangle ABC$ 的垂心, $\angle HBA$ 的平分线与$\angle ACH$ 的平分线交于 D, M、N 分别为 BC、AH 的中点. 求证: M、D、N 三点共线.

证明 如图 2.8 所示. 众所周知, $\angle HBA=\angle ACH$. 而 BD、CD 分别为$\angle HBA$ 与$\angle ACH$ 的平分线, 所以, $\angle DCH+\angle HBD=\angle HBA$. 因此$\angle DCB+\angle CBD=\angle HCB+\angle HBA=90°$, 从而$\angle BDC=90°$. 于是, 设过点 H 且平行于 CD 的直线与 AB 交于 E, 过点 H 且平行于 BD 的直线与 AC 交于 F, 则 $HE\perp BD$, $HF\perp CD$, 所以, $BD/\!/HF$, $CD/\!/HE$. 但 BD 为$\angle HBA$ 的平分线, 因此, BD 平分 HE, 从而直线 BD 过 EF 的中点. 同理, 直线 CD 也过 EF 的中点, 这说明 D 是 EF 的中点. 显然, $\triangle HEB$ 与$\triangle HFC$ 镜像相似, 且直线 EB 与 FC 交于 A, 而 N、D、M 分别为 HA、EF、BC 的中点, 故由例 2.1, M、D、N 三点共线.

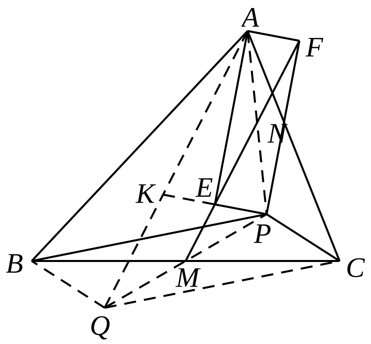

图 2.7

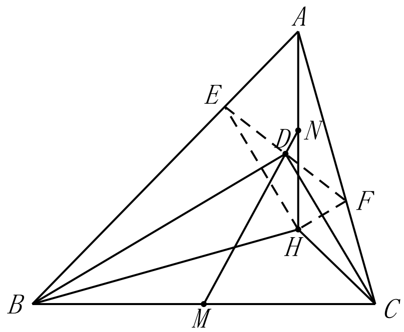

图 2.8

三、完全四边形与等角线

完全四边形(无三线共点的四条直线两两相交所构成的图形)也有一个十分漂亮的等角线性质.

定理 3.1 设 C、D 是$\angle AOB$ 所在平面上两点, 直线 AC 与 BD 交于 E, 直线 AD 与 BC 交于 F, 则当 OC、OD 是$\angle AOB$ 的两条等角线时, OE、OF 也是$\angle AOB$ 的两条等角线.

证明 只需证明: 当 OE 关于$\angle AOB$ 的等角线与 CD 交于点 F 时, A、D、F 三点共线.

事实上, 如图 3.1~3.4 所示. 因$\measuredangle DOB=-\measuredangle COA$, $\measuredangle BOF=-\measuredangle AOE$, $\measuredangle FOC=-\measuredangle EOD$, 所以

$$\frac{\sin\measuredangle COA}{\sin\measuredangle AOE}\cdot\frac{\sin\measuredangle EOD}{\sin\measuredangle DOB}\cdot\frac{\sin\measuredangle BOF}{\sin\measuredangle FOC}=-1.$$

(符号“$\measuredangle$”表示有向角)而 A、D、F 分别为$\triangle BCE$ 三边所在直线上的三点, 点 O 不在其三边所在直线上, 于是由 Menelaus 定理的第二角元形式[1]即知 A、D、F 三点共线.

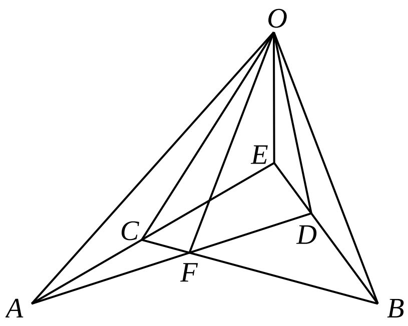

图 3.1

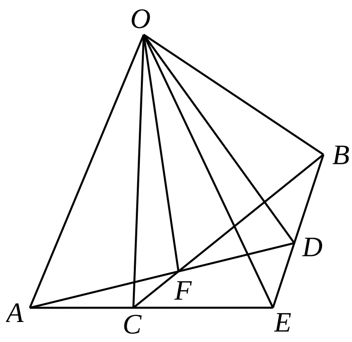

图 3.2

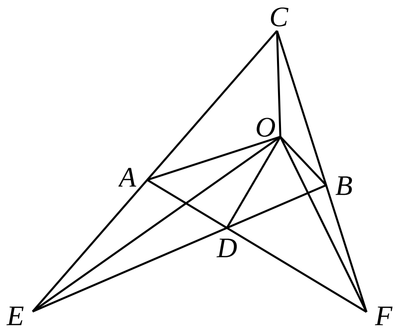

图 3.3

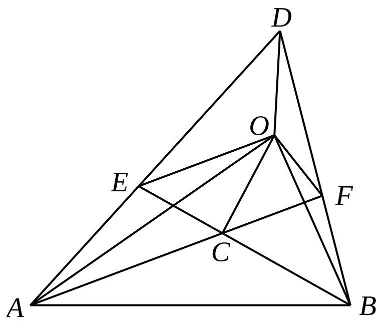

图 3.4

由于 $ECFDAB$ 是一个完全四边形，因而我们可以将定理 3.1 叙述为

定理 3.1′ 设 O 是完全四边形 $ECFDAB$ 所在平面上一点，若 OC、OD 是$\angle AOB$ 的两条等角线，则 OE、OF 也是$\angle AOB$ 的两条等角线.

正是因为这个原因，我们将定理 3.1 称之为完全四边形等角线定理.

在图 3.1 中，当 B 变为无穷远点时，便成为 2003 年的一道中国国家集训队培训题. 当 A、B 皆变为无穷远点时，则由定理 3.1 可得定理 2.1. 在图 3.2 中，当 OE 平分$\angle AOB$ 时，便是 1999 年全国高中数学联赛加试的那道几何题.

完全四边形等角线定理在处理某些有等角线条件的几何问题时，往往具有出奇制胜之效.

例 **3.1**. 设$\triangle OAB$ 与$\triangle OCD$ 镜像相似，其垂心分别是 H_1、H_2. 直线 AD 与 BC 交于 P. 求证: $OP\perp H_1H_2$.

证明 如图 3.5 所示. 因$\angle AOB=\angle DOC$，于是，设直线 AB 与 CD 交于 Q，则由定理 3.1，OP、OQ 是$\angle AOC$ 的两条等角线. 再设直线 OH_1 与 AB 交于 E，直线 OH_2 与 CD 交于 F，则 $QE\perp OE$, $QF\perp OF$，且 OP、OQ 是$\angle EOF$ 的两条等角线，于是由定理 1.1, $OP\perp EF$.

另一方面，因$\triangle OAB\backsim\triangle OCD$，垂心 H_1、H_2 是其相似对应点，所以 $\dfrac{OH_1}{OE}=\dfrac{OH_2}{OF}$，这说明 $H_1H_2\parallel EF$. 而 $OP\perp EF$. 故 $OP\perp H_1H_2$.

例 **3.2** .设 A、B、C、D 是一已知圆上四点，点 P 满足条件$\angle APC=\angle BPD$, AC 与 BD 交于点 E, $\odot(PAB)$与$\odot(PCD)$交于 P、F 两点. 求证: $\angle APE=\angle FPD$.

证明 如图 3.6 所示. 由根心定理, AB、CD、AF 三线交于一点 Q. 再由定理 3.1, PQ、PF 是$\angle APD$ 的两条等角线，即 PF、PE 是$\angle APD$ 的两条等角线，故$\angle APE=\angle FPD$.

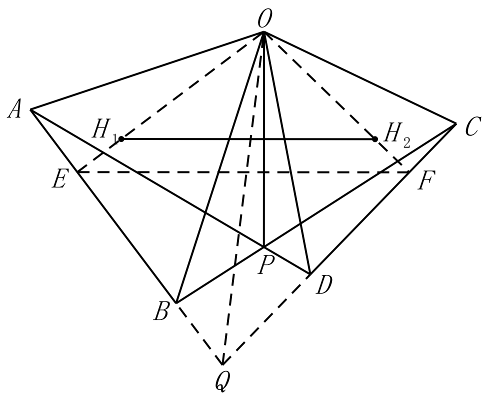

图 3.5

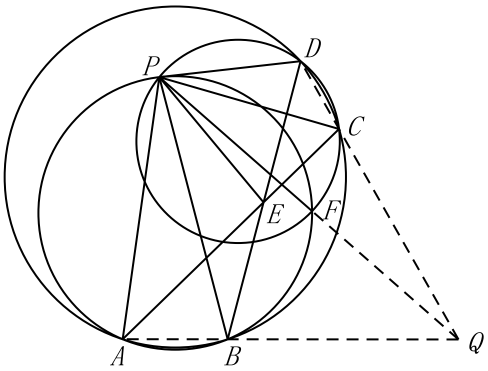

图 3.6

例 **3.3**. 设 D、E 分别是△ ABC 的边 AB、AC 延长线上的点, D'、E'分别在直线 AB、AC 上, 且直线 $D'E'$ 与 DE 关于 BC 的垂直平分线对称. 求证: $BD + CE = DE$ 的充要条件是 $BD' + CE' = D'E'$. (第 29 届伊朗数学奥林匹克(第 2 轮), 2011)

先证明一条引理.

引理 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle DAC$ 的外角平分线与$\angle DBC$ 的外角平分线交于 P, 则$\angle DPA = \angle BPC$ 的充要条件是 $AD + AC = BC + BD$. (意大利数学奥林匹克, 2011)

证明 如图 3.7 所示. 设点 C 关于 PB 的对称点为 C', 点 D 关于 PA 的对称点为 D', 则 C'、B、D 三点共线, C、A、D'三点共线, $PC' = PC$, $PD' = PD$, $BC = BC'$, $AD = AD'$, 所以

$$AD + AC = AD' + AC = CD',\ BC + BD = BC' + BD = C'D.$$

又$\angle C'PC = 2\angle BPC$, $\angle DPD' = 2\angle DPA$, 于是

$$AD + AC = BC + BD \Leftrightarrow CD' = C'D \Leftrightarrow \triangle PCD' \cong \triangle PC'D \Leftrightarrow$$
$$\angle CPD' = \angle C'PD \Leftrightarrow \angle DPD' = \angle C'PC \Leftrightarrow \angle DPA = \angle BPC.$$

原题的证明 如图 3.8 所示. 设 E、E'关于 BC 的垂直平分线的对称点分别为 F、F', DE 与 $D'E'$交于 P, 则 P 在 BC 的垂直平分线上, 且 $PF = PE$, $BF = CE$, $PF' = PE'$, $BF' = CE'$. 再设$\angle BAC$ 的角平分线与 BC 的垂直平分线交于 M, 则$\angle FBM = \angle MCE = \angle MBA$, 所以, MB 为$\angle DBF$ 的外角平分线. 显然, MP 是$\angle DPF$ 的外角平分线. 于是, 由引理与定理 3.1 即知,

$$BD + CE = DE \Leftrightarrow BD + BF = PD + PF \Leftrightarrow \angle BMD = \angle FMP \Leftrightarrow \angle FMF' = \angle DMD' \Leftrightarrow$$
$$\angle BMD' = \angle F'MP \Leftrightarrow BD' + BF' = PD' + PF' \Leftrightarrow BD' + CE' = PD' + PE' \Leftrightarrow BD' + CE' = D'E'.$$

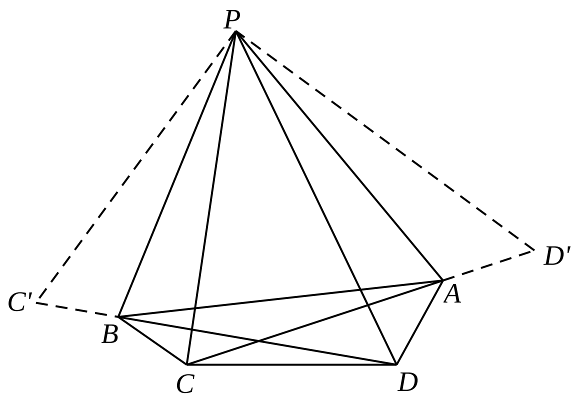

图 3.7

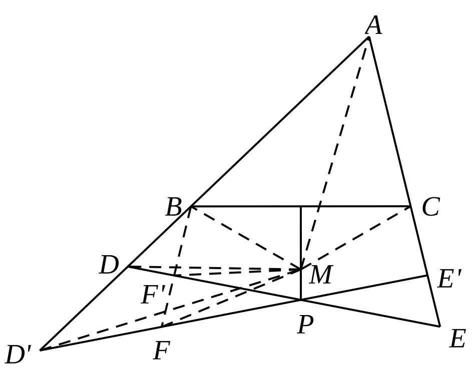

图 3.8

四、三角形的陪位中线

三角形的中线的等角线称为陪位中线.

如图 4.1 所示，设 M 是△ ABC 的边 BC 的中点，则 AM 关于∠BAC 的等角线称为△ ABC 的陪位中线. 三角形的陪位中线有三条.

定理 4.1 设 l 是过△ ABC 的顶点 A 的一条直线，则 l 是△ ABC 的陪位中线的充分必要条件是：l 平分 BC 的逆平行线.

证明 如图 4.2 所示. 设 $B'C'$ 是 BC 的逆平行线，B' 在 AC 上，C' 在 AB 上. 因 B、C、B'、C' 四点共圆，故△ $AB'C'$ ∽ △ ABC. 再设 M、N 分别是 BC、$B'C'$ 的中点，则 $\angle BAM = \angle BAN$，这说明 AM、AN 是∠BAC 的两条等角线，即 AN 是△ ABC 的陪位中线. 换句话说，△ ABC 的陪位中线平分 BC 的逆平行线. 反之亦然.

定理 4.2 设 D 是△ ABC 的边 BC 上一点，则 AD 是△ ABC 的陪位中线的充分必要条件为 $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

证明 如图 4.1 所示. 设 M 为 BC 的中点，由定理 1.2，AD 是△ ABC 的陪位中线 $\Leftrightarrow$

$$\frac{BM \cdot BD}{MC \cdot DC} = \frac{AB^2}{AC^2} \Leftrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

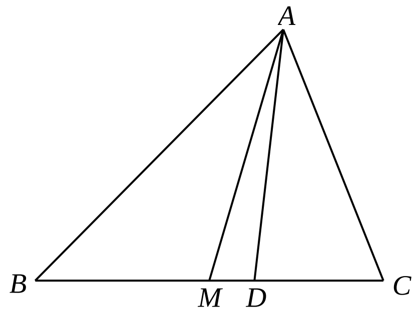

图 4.1

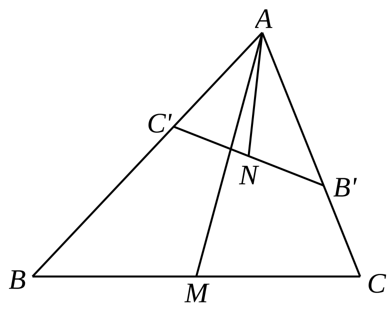

图 4.2

定理 4.3 设△ ABC 的外接圆在 B、C 两点的切线交于 P，则 AP 是△ ABC 的陪位中线.

证明 如图 4.3、图 4.4 所示. 过点 D 作 BC 的逆平行线与 AB、AC 分别交于 E、F. 因 $\angle DBC = \angle BAC$，所以，$\angle EBD = \angle ACB = \angle DEB$，因此，$DE = DB$. 同理，$DF = DC$. 而 $DB = DC$，所以，$DE = DF$，这说明 D 为 EF 的中点，即 AD 平分 BC 的逆平行线. 故由定理 4.1，AD 是△ ABC 的陪位中线.

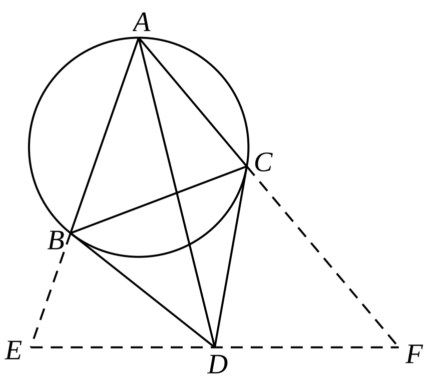

图 4.3

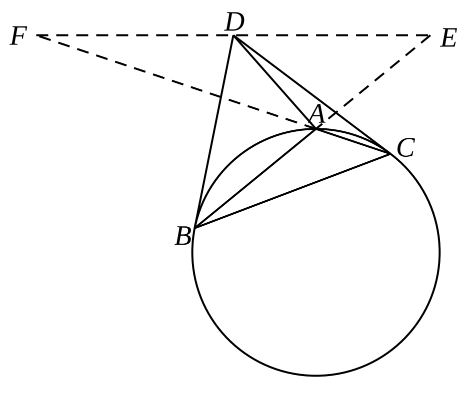

图 4.4

定理 4.3 曾是第 26 届 IMO 的预选题[2].

利用三角形的陪位中线的这几个性质(尤其是定理 4.3)可以方便地处理有关平面几何问题.

例 4.1 圆 $\varGamma_1$ 与圆 $\varGamma_2$ 交于 A、B 两点. 点 P 在圆 $\varGamma_1$ 上. 直线 PA 与 PB 分别交圆 $\varGamma_2$ 于 C、D(不同于 A、B), 圆 $\varGamma_1$ 在 A、B 两点的切线交于 Q. 求证: 直线 PQ 平分线段 CD. (圣彼德堡数学奥林匹克, 1997)

证明 如图 4.5 所示. 由定理 4.3, PQ 是$\triangle PAB$ 的陪位中线. 而 CD 是 AB 的逆平行线, 故再由定理 4.1 即知直线 PQ 平分线段 CD.

例 4.2 设 $\varGamma$ 是$\triangle ABC$ 的外接圆, 圆 $\varGamma$ 在 B、C 两点的切线交于 T. 过 A 且垂直于 AT 的直线与直线 BC 交于 S, 点 B_1、C_1 在直线 ST 上(B_1、B 在 BC 的垂直平分线的同侧), 且 $TB_1=TC_1=TB$. 求证: $\triangle AB_1C_1\backsim\triangle ABC$. (第 47 届 IMO 美国国家代表队选拔考试, 2006)

证明 如图 4.6 所示. 设 M 为 BC 的中点, MT 与圆 $\varGamma$ 交于 N, 则 N 为 BC (不含点 A)的中点, 所以, AN 是$\angle BAC$ 的平分线. 又因 TB、TC 是圆 $\varGamma$ 的两条切线, 由定理 4.3, AM、AT 是$\angle BAC$ 的两条等角线, 所以 AN 是$\angle MAT$ 的平分线. 注意$\angle NCT=\angle NAC=\angle BAN=\angle BCN$, 所以, CN 是$\angle MCT$ 的平分线. 于是

$$\frac{MC}{TC_1}=\frac{MC}{TC}=\frac{MN}{NT}=\frac{AM}{AT}.$$

另一方面, 显然, $TM\perp MS$. 又 $TA\perp AS$, 所以 A、M、T、S 四点共圆, 因此$\angle STA=\angle SMA$, 即$\angle C_1TA=\angle CMA$, 于是, $\triangle ATC_1\backsim\triangle AMC$. 同理, $\triangle AB_1T\backsim\triangle ABM$. 故$\triangle AB_1C_1\backsim\triangle ABC$.

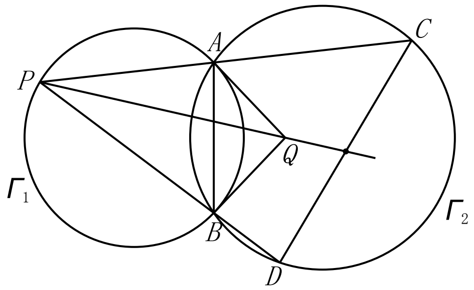

图 4.5

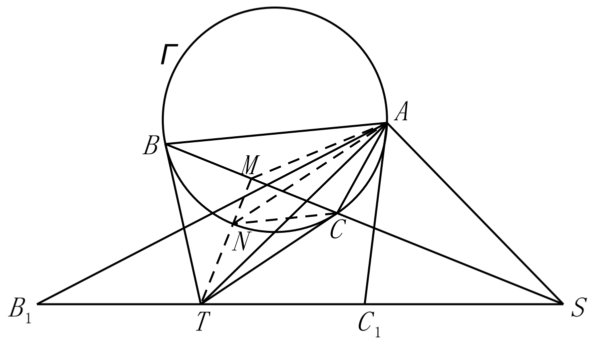

图 4.6

例 4.3 设圆 $\varGamma_1$ 与圆 $\varGamma_2$ 交于 A、B 两点. 圆 $\varGamma_1$ 在 A 点的切线交圆 $\varGamma_2$ 于 C, 圆 $\varGamma_2$ 在 A 点的切线交圆 $\varGamma_1$ 于 D, M 是 CD 的中点. 求证: $\angle CAM=\angle DAB$. (第 48 届 IMO 中国国家代表队培训, 2007)

证明 如图 4.7 所示. 设 AB 与 CD 交于 K, CD 与 $\varGamma_1$、$\varGamma_2$ 的另一个交点分别为 E、F, 则由圆幂定理, 有

$$EK\cdot CK=KA\cdot KB=KF\cdot KD,$$

所以, $EK\cdot CK+CK\cdot KD=KF\cdot KD+CK\cdot KD$, 即 $CK\cdot ED=KD\cdot CF$, 因此, $\dfrac{CK}{KD}=\dfrac{CF}{ED}$.

另一方面, 因为圆 $\varGamma_1$、$\varGamma_2$ 分别与 AD、AC 都相切于点 A, 所以 $CF\cdot CD=AB^2$, $ED\cdot CD=AC^2$, 因此 $\dfrac{CF}{ED}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$. 于是, $\dfrac{BK}{KC}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$, 由定理 4.2, AD 为$\triangle ABC$ 的陪位中线. 故$\angle CAM=\angle DAB$.

例 4.4 圆 $\varGamma$ 与圆 ω 内切于 S, 圆 $\varGamma$ 的弦 AB 与圆 ω 相切于 T, 设圆 ω 的圆心为 O, P 为直线 AO 上一点. 求证: $PB\perp AB$ 的充分必要条件是 $PS\perp TS$. (第 50 届 IMO 中国国家集训队测试, 2009)

证明 如图 4.8 所示. 过点 A 作圆 ω 的另一条切线 AU, U 为切点, M 为 TU 的中点, 则 M 在 AO 上, 且 $AP\perp TU$. 熟知, ST 平分$\angle ASB$, 且由定理 4.3, SA、SM 是$\angle SUT$ 的两条等角线, 所以, $\angle ISB=\angle AST=\angle USM$. 又$\angle BTS=\angle MUS$, 因此, $\angle SBT=\angle SMU$, 这说明 T、B、S、M 四点共圆. 于是, $PB\perp AB\Leftrightarrow T$、$B$、$P$、$M$ 四点共圆 $\Leftrightarrow T$、P、S、M 四点共圆 $\Leftrightarrow ST\perp PS$.

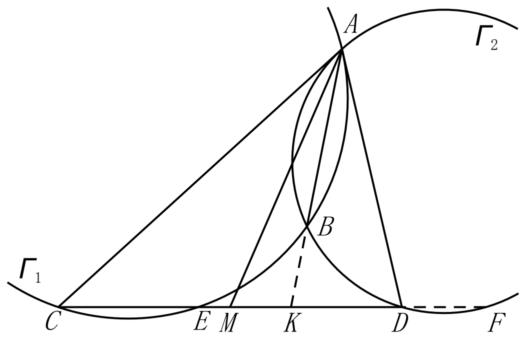

图 4.7

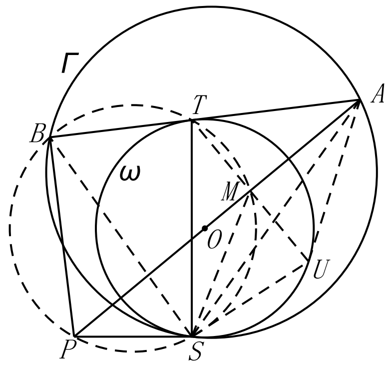

图 4.8

例 4.5 设△ ABC 的内切圆与 BC、CA、AB 分别切于 D、E、F, M、N 分别为 DE、DF 的中点, 直线 MN 与 CA 交于 K, BE 与 DF 交于 P. 求证: FK 平分线段 PE.

证明 如图 4.9 所示. 因 M、N 分别为 DE、DF 的中点, 所以 $MN /\!/ EF$, 因此 $\angle EDN = \angle AEF = \angle EKN$, 这说明 E、N、D、K 四点共圆, 所以 $\angle KDE = \angle KNE = \angle FEN$.

另一方面, 因 EB 是△ EFD 的陪位中线, 所以 $\angle EFN = \angle BED$, 因此 $\angle KDN = \angle BED$. 故 $DK /\!/ BE$. 于是, 设直线 DK 与 EF 交于 L, 则由 $NK /\!/ FL$, N 是 DF 的中点知, K 为 DL 的中点. 再由 $DK /\!/ BE$ 即知 FK 平分线段 PE.

例 4.6 设 I 是△ ABC 的内心, L、M、N 分别为△ ABC 的外接圆上 BAC 、 CBA 、 ACB 的中点, 直线 LI 与 BC 交于 D, 直线 MI 与 CA 交于 E, 直线 NI 与 AB 交于 F. 求证: AD、BE、CF 三线共点.

证明 如图 4.10 所示. 设 K 为△ ABC 的外接圆上 BC (不含点 A)的中点, 则 $KI = KB = KC$, 所以, K 为△ IBC 的外心. 又 L 是 BAC 的中点, 因而 LK 是△ ABC 的外接圆的直径, 所以, $LB \perp BI$, $LC \perp CI$. 这说明 LB、LC 是△ IBC 的外接圆的两条切线, 由定理 4.3, IL 是△ IBC 的陪位中线, 再由定理 4.2, $\frac{BD}{DC} = \frac{IB^2}{IC^2}$. 同理, $\frac{CE}{EA} = \frac{IC^2}{IA^2}$, $\frac{AF}{FB} = \frac{IA^2}{IB^2}$. 于是, $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$. 故由 Ceva 定理, AD、BE、CF 三线共点.

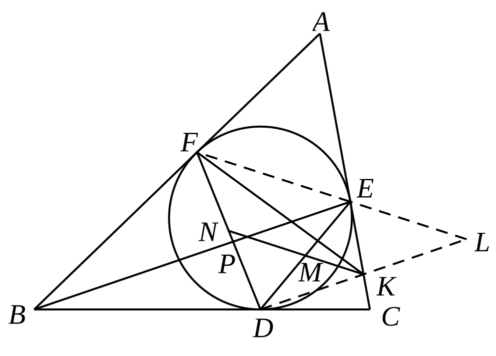

图 4.9

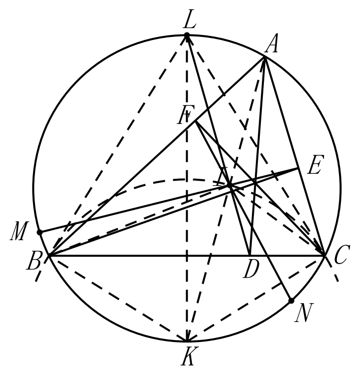

图 4.10

参考文献

[1] 萧振纲. Menelaus 定理的第二角元形式[J]. 中学数学研究(广州), 2 (2006);

[2]. 中国数学会普及工作委员会. 第 26 届国际数学奥林匹克[M]. 北京: 中国青年出版社. 1987: 46~88.