

数列极限技艺测题（地狱篇）

Bruce

一，若级数 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$ 绝对收敛，求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-n}^n a_{m+k} \right|}{2n+1}$

二，如果数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = a_1 + 1 = a_0 + 2$ ，且对于任意 $n \geq 2$ ，有如下归递关系

$$a_{n-1}(a_n + a_{n+1}) + a_{n-2}(a_n - a_{n+1}) = \alpha + a_n^2 + a_{n-1}^2$$

(1)，证明： $\alpha \geq 0$ 是数列 $\left\{ \frac{a_n}{a_{n-1}} \right\}$ 有极限的充分条件。

(2)，求极限： $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 。

(3)，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{\alpha}{\alpha + 2} \frac{1}{(a_n - a_{n-1})^2}$ 是否存在？若存在，求出其具体值。

三，若数列 $\{a_n\}$ 满足归递关系 $a_{n+1} = a_n + na_{n-1}$ ，并且 $a_0 = 1$ ，求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n^4}{(n!)^2 e^{4\sqrt{n}}}$$

四，若 $f(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^n}$ ，求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| f(n) + f\left(\frac{1}{n}\right) \right|$ ，如果把 n 换成所有实数 x ，结论是否一致呢？

五， $f_1(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上正值连续函数，若函数列 $\{f_n\}$ 对于 $n=1,2,3,\dots$ 有关系

$$f_{n+1}(x) = 2 \int_0^x \sqrt{f_n(t)} dt$$

(1)，证明 $\{f_n\}$ 一致收敛到某个函数 $f(x)$ ，并求出 $f(x)$ 的表达式

(2)，若 $\alpha > 1$ ，求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^\alpha} |f_n(x) - f(x)|$

六，函数列 $\{K_n\}$ 与函数 $f(x)$ 都是以 2π 为周期的连续函数，求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) K_n(-x) dx$$

七，若 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 表示置换群 S_n 中类型为 $1^{p_1} 2^{p_2} \dots n^{p_n}$ 的置换，求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p_1 + \dots + np_n = n} \frac{1}{\prod_{1 \leq i \leq n} p_i! i^{p_i}}$$

八， E 是区间 $[0, 1]$ 上的所有实变函数的集合，证明在 E 上不能定义一个拓扑，

使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ 成立当且仅当 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛到 f

九，若 f, g 是 $E \subset R^n$ ($m(E) < \infty$) 上的非负可测函数，且 $f \in L^\infty(E)$ ， g 有界，

那么对于任意正整数 p, q, a, b ，与实数 α ，若函数列 $\{h_n\}$ 有表达式

$$h_n(\alpha) = n^\alpha \left[\left\| (f^{n+a} g)^{\frac{1}{n+p}} \right\|_{n+p} - \left\| (f^{n+b} g)^{\frac{1}{n+q}} \right\|_{n+q} \right]$$

讨论 $\{h_n\}$ 的收敛区间与 $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\alpha)$ 的取值，其中 $\|f\|_n = \left(\int_E |f(x)|^n dx \right)^{1/n}$

十， A_n, G_n, H_n, Q_n 分别为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的算数均值，几何均值，调和均值，

平方均值。若 $f, g, h \in C([0, 1])$ ， $dY_n = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ ，求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, 1]^n} \frac{Q_n^2}{A_n} dY_n \int_{[0, 1]^n} f(A_n) g(G_n) h(H_n) dY_n$$

EX: 若 S 是实数 q 的集合，使得只存在一个在 0 到 1 之间活动的数列 $\{a_n\}$ ，满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k q^{-k} = 1$$

证明 $|S| = 2^{\aleph_0}$

