有关单形k号心、垂心欧拉球心的心距公式、几何不等式及其欧拉超球面定理

李兴源，lihpb@qq.com

摘　要

本文给出了判断n维单形垂心存在性的充分必要条件。对于存在垂心的n维单形，本文进一步给出这类单形的欧拉超球面定理及其k号心、垂心、欧拉球心的心距公式与几何不等式。

关键词

n维单形，k号心，垂心，欧拉超球面

The Euler Hyperspherical Theorem,Geometric Inequalities and Distance Formulas among the No.K Centers, Orthocenter, Euler Center in the N-Simplex

Xingyuan Li，lihpb@qq.com

Abstract

This article provides the sufficient and necessary condition to determine the existence of the orthocenter for the n-simplex. For the n-simplex with an orthocenter, this article further presents its Euler hyperspherical theorem, as well as the distance formulas and geometric inequalities among the No.k centers, orthocenter and Euler center.

Keywords

N-Simplex, No.K Center, Orthocenter, Euler Hypersphere

---

1. 引言

定义 1 在 n 维欧氏空间中，设 n 维单形 $A_0A_1A_2\ldots A_n$ 的外心为 O， k 为任意正整数，若点 K 满足

$$\overrightarrow{OK}=\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n}\overrightarrow{OA_i}\ ,$$

则将点 K 称作 n 维单形 $A_0A_1A_2\ldots A_n$ 的 k 号心[1]。

定义 2 若n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的$n+1$条高线在n维欧氏空间中交于一点H，则将点H称作n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的垂心。本文将存在垂心的n维单形称作n维垂心单形。

本文所讨论的n维单形均默认其为非退化单形且存在垂心（因为对于退化单形，其外心O在无穷远点，也不可能存在垂心）。

定义 3 在n维欧氏空间中，设n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的外心为O，若点E满足

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\overrightarrow{OA_i},$$

则将点E称作n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的欧拉球心。

引理 1 当$n\geq 3$时，n维单形存在垂心的充分必要条件是该单形中任意两条没有公共端点的棱均互相垂直。[2][3]

证明 设n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的任意两顶点A_i、A_j所对的$n-1$维侧面分别为S_i、S_j，S_i与S_j所交的$n-2$维单形为F_{ij}，$0\leq i<j\leq n$。

先证必要性，设n维垂心单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的垂心为H，由定义 2 知

$$\begin{cases}A_iH\perp S_i\\A_jH\perp S_j\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_iH\perp F_{ij}\\A_jH\perp F_{ij}\end{cases}\Rightarrow A_iA_j\perp F_{ij},$$

因为$A_kA_l(0\leq k<l\leq n,k\neq i,l\neq j)$为$n-2$维单形$F_{ij}$的棱，故

$$A_iA_j\perp A_kA_l,$$

必要性得证。

再证充分性，若n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$满足

$$A_iA_j\perp A_kA_l(0\leq k<l\leq n,k\neq i,l\neq j),$$

即

$$A_iA_j\perp F_{ij},$$

作A_iH_{ij}垂直于F_{ij}所在的$n-2$维超平面于H_{ij}，则F_{ij}垂直于三角形$A_iA_jH_{ij}$所在的二维平面。

再作A_iH_i垂直于直线A_jH_{ij}于H_i，A_jH_j垂直于直线A_iH_{ij}于H_j，则直线A_iH_i与A_jH_j在三角形$A_iA_jH_{ij}$所在的二维平面中必存在交点，设交点为H，因此

$$A_iH\perp S_i,\quad A_jH\perp S_j,$$

故H为n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的垂心。充分性得证。

引理 2 当$n\geq 3$时，n维垂心单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的垂心为H，各顶点$A_i(i=0,1,2,\ldots,n)$所对的$n-1$维侧面为S_i，S_i的垂心为H_i，则A_i、H、H_i三点共线。

证明 设n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的任意两顶点A_i、A_j所对的$n-1$维侧面分别为S_i、S_j，S_i与S_j所交的$n-2$维单形为F_{ij}，$0\leq i<j\leq n$。作直线A_0H与S_0所在的$n-1$维超平面交于点H_0，为不失一般性，以下只证H_0即为$n-1$维侧面S_0的垂心。

由定义 2 知

$$A_0H_0\perp S_0,$$

即

$$A_0H_0\perp F_{0i}(i=1,2,\ldots,n)。$$

又由引理 1 有

$$A_0A_i \perp F_{0i},$$

则在 S_0 所在的 $n-1$ 维欧氏子空间中，有

$$A_iH_0 \perp F_{0i},$$

再由定义 2 知 H_0 即为 $n-1$ 维侧面 S_0 的垂心，故命题成立。

2. 预备知识

引理 3 n 维单形 $A_0A_1A_2\ldots A_n$ 的外心为 O，垂心为 H，则：

$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n}\overrightarrow{OA_i}。$$

证明 以下先证 A_0H 垂直于 $A_jA_k(1\le j<k\le n)$

$$\overrightarrow{A_0H}\cdot\overrightarrow{A_jA_k}=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA_0})(\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OA_j})=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=0}^{n}\overrightarrow{OA_i}-(n-1)\overrightarrow{OA_0}\right](\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OA_j})$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\overrightarrow{OA_j}+\overrightarrow{OA_k}+\sum_{\substack{i=0\\ i\ne j,k}}^{n}\overrightarrow{OA_i}-(n-1)\overrightarrow{OA_0}\right](\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OA_j})$$

$$=\frac{1}{n-1}(\left|\overrightarrow{OA_k}\right|^2-\left|\overrightarrow{OA_j}\right|^2)+\frac{1}{n-1}\left[\sum_{\substack{i=0\\ i\ne j,k}}^{n}\overrightarrow{OA_i}-(n-1)\overrightarrow{OA_0}\right](\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OA_j})$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{i=1\\ i\ne j,k}}^{n}(\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OA_0})(\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OA_j})=\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{i=1\\ i\ne j,k}}^{n}\overrightarrow{A_0A_i}\cdot\overrightarrow{A_jA_k}=0。$$

设 n 维单形 $A_0A_1A_2\ldots A_n$ 的顶点 A_i 所对的 $n-1$ 维侧面为 $S_i(i=0,1,2,\ldots,n)$，则 A_0H 垂直于 S_0 所在的 $n-1$ 维超平面，同理可证 A_iH 垂直于 S_i 所在的 $n-1$ 维超平面，H 即为 n 维单形 $A_0A_1A_2\ldots A_n$ 的垂心。

当 $n=3$ 时，即为文[4]所讨论的关于垂心四面体的情形。

由此可知，n 维单形 $A_0A_1A_2\ldots A_n$ 的垂心 H、欧拉球心 E、重心 G 分别为该单形的 $n-1$ 号心、n 号心、$n+1$ 号心，且外心 O、重心 G、欧拉球心 E、垂心 H 四点共线。

3. N 维垂心单形的欧拉超球面定理

定理 1 n 维单形 $A_0A_1A_2\ldots A_n$ 的垂心为 H，外心为 O，欧拉球心为 E，外接圆半径为 R，各顶点 A_i 所对的 $n-1$ 维侧面为 S_i，S_i 的垂心为 H_i，S_i 的重心为 G_i，点 F_i 内分线段 A_iH 成 $A_iF_i:F_iH=n-1:1$，则 F_i、G_i、$H_i(i=0,1,2,\ldots,n)$ 均在以 E 为球心，半径为 $\frac{R}{n}$ 的超球面上。

证明 由于 F_i 为线段 $HA_i(i=0,1,2,\ldots,n)$ 的第一个 n 等分点，即

$$\overrightarrow{OF_i}=\frac{\overrightarrow{OA_i}+(n-1)\overrightarrow{OH}}{n}=\frac{2}{n}\overrightarrow{OA_i}+\frac{1}{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n}\overrightarrow{OA_j}=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\overrightarrow{OA_j}+\frac{1}{n}\overrightarrow{OA_i},$$

因为

$$\overrightarrow{OG_i}=\frac{1}{n}\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\overrightarrow{OA_j}=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\overrightarrow{OA_j}-\frac{1}{n}\overrightarrow{OA_i},$$

则由定义 3 可知 E 为线段 F_iG_i 的中点，即 F_iG_i 是以 E 为球心，半径为 $\frac{R}{n}$ 的超球面的直径。

再由引理 2 知 A_i、F_i、H、H_i 四点共线，且 A_iH_i 垂直于 S_i 所在的 $n-1$ 维超平面，即 $\angle F_iH_iG_i=\frac{\pi}{2}$，故 H_i 在以 E 为球心，半径为 $\frac{R}{n}$ 的超球面上。

综上，命题得证。

4. 心距公式

定理 2 n 维单形 $A_0A_1A_2\ldots A_n$ 的外心为 O，k 号心为 K，垂心为 H，欧拉球心为 E，重心为 G，外接圆半径为 R，则

$$(n-1)^2OH^2=n^2OE^2=(n+1)^2OG^2=k^2OK^2=(n+1)^2R^2-\sum_{0\le i<j\le n}A_iA_j^{\ 2}。$$

证明 由定义 1、定义 3 和引理 3 有

$$(n-1)^2OH^2=n^2OE^2=(n+1)^2OG^2=k^2OK^2=\left(\sum_{i=0}^{n}\overrightarrow{OA_i}\right)^2=(n+1)R^2+2\sum_{0\le i<j\le n}\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j},$$

又

$$\sum_{0\le i<j\le n}A_iA_j^{\ 2}=\sum_{0\le i<j\le n}(\overrightarrow{OA_j}-\overrightarrow{OA_i})^2=n\sum_{i=0}^{n}\left|\overrightarrow{OA_i}\right|^2-2\sum_{0\le i<j\le n}\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j}=n(n+1)R^2-2\sum_{0\le i<j\le n}\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j},$$

将以上两式两边分别相加并整理即可证得命题。

根据定理 2 可以得到

定理 3 n 维单形 $A_0A_1A_2\ldots A_n$ 的外接圆半径为 R，K、K' 分别为该单形 k 号心和 k' 号心 $(k<k')$，则

$$KK'=\frac{k'-k}{kk'}\sqrt{(n+1)^2R^2-\sum_{0\le i<j\le n}A_iA_j^{\ 2}}。$$

再分别用垂心 H、欧拉球心 E、重心 G 置换定理 3 中的 K、K'，即得

定理 4 n 维单形 $A_0A_1A_2\ldots A_n$ 的垂心为 H，欧拉球心为 E，重心为 G，外接圆半径为 R，则

$$EH=\frac{1}{n(n-1)}\sqrt{(n+1)^2R^2-\sum_{0\le i<j\le n}A_iA_j^{\ 2}},$$

$$EG=\frac{1}{n(n+1)}\sqrt{(n+1)^2R^2-\sum_{0\le i<j\le n}A_iA_j^{\ 2}},$$

$$GH=\frac{2}{(n+1)(n-1)}\sqrt{(n+1)^2R^2-\sum_{0\le i<j\le n}A_iA_j^{\ 2}}。$$

定理 5 n 维单形 $A_0A_1A_2\ldots A_n$ 的外心为 O，k 号心为 K，外接圆半径为 R，则

$$\sum_{i=0}^{n}KA_i^{\ 2}=(n+1)R^2+(n+1-2k)OK^2。$$

证明 根据向量运算和定义 1 和可得

$$\sum_{i=0}^{n} KA_i^{\ 2} = \sum_{i=0}^{n} (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OK})^2 = \sum_{i=0}^{n} \left|\overrightarrow{OA_i}\right|^2 + (n+1)\left|\overrightarrow{OK}\right|^2 - 2\overrightarrow{OK}\sum_{i=0}^{n}\overrightarrow{OA_i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left|\overrightarrow{OA_i}\right|^2 + (n+1-2k)\left|\overrightarrow{OK}\right|^2 = (n+1)R^2 + (n+1-2k)OK^2 \text{。}$$

再分别用垂心H、欧拉球心E、重心G置换定理 5 中的K，即得

定理 6 n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的外心为O，垂心为H，欧拉球心为E，重心为G，外接圆半径为R，则

$$\sum_{i=0}^{n} HA_i^{\ 2} = (n+1)R^2 - (n-3)OH^2 \text{，}$$

$$\sum_{i=0}^{n} EA_i^{\ 2} = (n+1)R^2 - (n-1)OE^2 \text{，}$$

$$\sum_{i=0}^{n} GA_i^{\ 2} = (n+1)R^2 - (n+1)OG^2 \text{。}$$

将定理 2 代入到定理 5 和定理 6 中可得

定理 7 n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的k号心为K，垂心为H，欧拉球心为E，重心为G，外接圆半径为R，则

$$\sum_{i=0}^{n} KA_i^{\ 2} = \frac{(n+1)(n+1-k)^2}{k^2}R^2 + \frac{2k-n-1}{k^2}\sum_{0\le i<j\le n} A_iA_j^{\ 2} \text{，}$$

$$\sum_{i=0}^{n} HA_i^{\ 2} = \frac{4(n+1)}{(n-1)^2}R^2 + \frac{n-3}{(n-1)^2}\sum_{0\le i<j\le n} A_iA_j^{\ 2} \text{，}$$

$$\sum_{i=0}^{n} EA_i^{\ 2} = \frac{n+1}{n^2}R^2 + \frac{n-1}{n^2}\sum_{0\le i<j\le n} A_iA_j^{\ 2} \text{，}$$

$$\sum_{i=0}^{n} GA_i^{\ 2} = \frac{1}{n+1}\sum_{0\le i<j\le n} A_iA_j^{\ 2} \text{。}$$

在定理 6 和定理 7 中，当$n=3$时，即为文[5]所讨论的关于垂心四面体的情形。

定理 8 n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的外心为O，k号心为K，外接圆半径为R，则

$$A_0K^2 + \frac{1-k}{k^2}\sum_{i=1}^{n} A_0A_i^{\ 2} + \frac{1}{k^2}\sum_{1\le i<j\le n} A_iA_j^{\ 2} = \frac{(n+1-k)^2R^2}{k^2} \text{。}$$

证明 因为

$$A_0K^2 = (\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OA_0})^2 = \frac{1}{k^2}\left[(1-k)\overrightarrow{OA_0} + \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\right]^2$$

$$= \frac{1}{k^2}\left[(1-k)^2R^2 + 2(1-k)\overrightarrow{OA_0}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i} + \left(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{k^2}\left\{[(1-k)^2+n]R^2 + 2(1-k)\overrightarrow{OA_0}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i} + 2\sum_{1\le i<j\le n}\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j}\right\} \text{，} \quad (1)$$

又

$$\sum_{i=1}^{n} A_0A_i^{\ 2}=\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OA_0})^2=n\left|\overrightarrow{OA_0}\right|^2+\sum_{i=1}^{n}\left|\overrightarrow{OA_i}\right|^2-2\overrightarrow{OA_0}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=2nR^2-2\overrightarrow{OA_0}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\text{，}\quad(2)$$

$$\sum_{1\le i<j\le n} A_iA_j^{\ 2}=\sum_{1\le i<j\le n}(\overrightarrow{OA_j}-\overrightarrow{OA_i})^2=(n-1)\sum_{i=1}^{n}\left|\overrightarrow{OA_i}\right|^2-2\sum_{1\le i<j\le n}\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j}=n(n-1)R^2-2\sum_{1\le i<j\le n}\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j}\text{，}\quad(3)$$

结合(1)、(2)、(3)并消去$\overrightarrow{OA_0}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}$、$\sum_{1\le i<j\le n}\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j}$即可证得命题。

在定理 2、定理 5 和定理 8 中，当$k=1$时，即为文[6]所讨论的关于n维单形 1 号心的情形。

再分别用垂心H、欧拉球心E、重心G置换定理 8 中的K并整理，即得

定理 9 n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的垂心为H，欧拉球心为E，重心为G，外接圆半径为R，则

$$(n-1)^2A_0H^2=(n-2)\sum_{i=1}^{n}A_0A_i^{\ 2}-\sum_{1\le i<j\le n}A_iA_j^{\ 2}+4R^2\text{，}$$

$$n^2A_0E^2=(n-1)\sum_{i=1}^{n}A_0A_i^{\ 2}-\sum_{1\le i<j\le n}A_iA_j^{\ 2}+R^2\text{，}$$

$$(n+1)^2A_0G^2=n\sum_{i=1}^{n}A_0A_i^{\ 2}-\sum_{1\le i<j\le n}A_iA_j^{\ 2}\text{。}$$

特别地，当n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的垂心H与顶点A_0重合时，即$\angle A_iA_0A_j\,(1\le i<j\le n)$为直角，由定理 6 和定理 9 有

推论 1 n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的垂心为A_0，外接圆半径为R，则

$$\sum_{i=1}^{n}A_0A_i^{\ 2}=4R^2\text{，}\quad\sum_{1\le i<j\le n}A_iA_j^{\ 2}=(n-1)\sum_{i=1}^{n}A_0A_i^{\ 2}=4(n-1)R^2\text{。}$$

再由定理 7、定理 8 和定理 9 可得

定理 10 n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的外心为O，垂心为H，欧拉球心为E，重心为G，外接圆半径为R，则

$$\sum_{i=1}^{n}KA_i^{\ 2}=\frac{n(n+1-k)^2}{k^2}R^2+\frac{k-n}{k^2}\sum_{i=1}^{n}A_0A_i^{\ 2}+\frac{2k-n}{k^2}\sum_{1\le i<j\le n}A_iA_j^{\ 2}\text{，}$$

$$\sum_{i=1}^{n}HA_i^{\ 2}=\frac{4nR^2}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n}A_0A_i^{\ 2}+\frac{n-2}{(n-1)^2}\sum_{1\le i<j\le n}A_iA_j^{\ 2}\text{，}$$

$$\sum_{i=1}^{n}EA_i^{\ 2}=\frac{R^2}{n}+\frac{1}{n}\sum_{1\le i<j\le n}A_iA_j^{\ 2}\text{，}$$

$$\sum_{i=1}^{n}GA_i^{\ 2}=\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n}A_0A_i^{\ 2}+\frac{n+2}{(n+1)^2}\sum_{1\le i<j\le n}A_iA_j^{\ 2}\text{。}$$

5. 几何不等式

由定理 5 和定理 7 可得

定理 11 n维单形$A_0A_1A_2\ldots A_n$的外心为O，k号心为K，外接圆半径为R，则

当$n+1<2k$时，

$$\frac{(n+1)(n+1-k)^2}{k^2}R^2<\sum_{i=0}^{n}KA_i^{\ 2}\le(n+1)R^2\text{，}$$

不等式中右边等号成立的充要条件是O与K重合；
当$n+1=2k$时，

$$\sum_{i=0}^{n} KA_i^{\ 2}=(n+1)R^2,$$

即O与K重合；
当$n+1>2k$时，

$$(n+1)R^2\le\sum_{i=0}^{n} KA_i^{\ 2}<\frac{(n+1)(n+1-k)^2}{k^2}R^2,$$

不等式中左边等号成立的充要条件是O与K重合。
再分别用垂心H、欧拉球心E、重心G置换定理 11 中的K，即得
定理 12 n维单形$A_0A_1A_2...A_n$的外心为O，垂心为H，外接圆半径为R，则
当$n=2$时，在三角形$A_0A_1A_2$中有

$$3R^2\le\sum_{i=0}^{n} HA_i^{\ 2}<12R^2,$$

不等式中左边等号成立的充要条件是O与H重合；
当$n=3$时，在垂心四面体$A_0A_1A_2A_3$中有

$$\sum_{i=0}^{n} HA_i^{\ 2}=4R^2;$$

当$n\ge 4$时，

$$\frac{4(n+1)}{(n-1)^2}R^2<\sum_{i=0}^{n} HA_i^{\ 2}\le(n+1)R^2,$$

不等式中右边等号成立的充要条件是O与H重合；
定理 13 n维单形$A_0A_1A_2...A_n$的外心为O，欧拉球心为E，外接圆半径为R，则

$$\frac{n+1}{n^2}R^2<\sum_{i=0}^{n} EA_i^{\ 2}\le(n+1)R^2,$$

不等式中右边等号成立的充要条件是O与E重合。
定理 14 n维单形$A_0A_1A_2...A_n$的外心为O，重心为G，外接圆半径为R，则

$$\frac{1}{n+1}\sum_{0\le i<j\le n} A_iA_j^{\ 2}=\sum_{i=0}^{n} GA_i^{\ 2}\le(n+1)R^2,$$ [7][8]

不等式中等号成立的充要条件是O与G重合。

参考文献

[1] 曾建国,曹 新,熊曾润.关于 n 维单形的两个轨迹定理[J].大学数学,2011,27(04):79-81.

[2] 马统一,邬天泉.单形的心距向量公式及其几何特征[J].数学的实践与认识,2007, 17:144-153.

[3] Gerber L.The orthocentric simplex as an extreme simplex[J].Pacific Joumal of Mathematics,1975,56:97-111.

[4] 曾建国.垂心四面体的垂心的一个向量形式——兼谈四面体的垂心与欧拉球心之间的关系[J].中学数学研究（华南师范大学）（上半月）,2009(2):27-28.

[5] 冯华.四面体同垂心和高有关的两个性质[J].中学数学,1995,(11):28-29.

[6] 熊曾润.n 维共球有限点集的垂心及其性质[J].鲁东大学学报(自然科学版),2012,28(03):193-197.

[7] 沈文选.涉及单形重心的几个几何不等式[J].湖南师范大学自然科学学报,2001,(01):17-19+30.

[8] 沈文选.关于单形的几个含参几何不等式(英文)[J].数学理论与应用,2000,(01):88-94.