有关单形中面的几何不等式

李兴源　lihpb@qq.com

摘　要

本文给出一系列关于n维单形中面的几何不等式。

关键词

n维单形，中面，几何不等式

The Geometric Inequalities for the Middle Sections in the N-Simplex

Xingyuan Li, lihpb@qq.com

Abstract

This article presents a series of geometric inequalities for the middle sections in the n-simplex.

Keywords

N-Simplex, Middle Section, Geometric Inequality

1. 引言

本文约定：n 维单形 Ω 的体积为 V，用 $S_i(i=1,2,\ldots,n+1)$ 表示 Ω 的第 i 个 $n-1$ 维侧面及其面积，垂直于底面 S_i 的高为 h_i，S_i 与 S_j 所夹的 $n-1$ 维中面面积为 $M_{ij}(i,j=1,2,\ldots,n+1;i\neq j)$，$S_i$ 与 S_j 所夹的二面角平分面的 $n-1$ 维面积为 T_{ij}，S_i 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij}，x_1、x_2、…、x_{n+1} 为任意正实数，x 为任意实数，$n\geq 3$。

文[1]给出了以下结论

命题 1 若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\frac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\leq i<j\leq n+1}\frac{M_{ij}^2}{S_i^2+S_j^2}\leq\frac{1}{8}(n+1)^2,$$

等号成立的充要条件是 $S_1=S_2=\cdots=S_{n+1}$；

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{S_i^2+S_j^2}{M_{ij}^2}\ge 2n^2,$$

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形。

命题 2 若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\frac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{M_{ij}^2+T_{ij}^2}{(S_i+S_j)^2}\le\frac{1}{8}(n+1)^2,$$

等号成立的充要条件是 $S_1=S_2=\cdots=S_{n+1}$；

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{(S_i+S_j)^2}{M_{ij}^2+T_{ij}^2}\ge 2n^2,$$

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形。

本文将给出命题 1 和命题 2 的加强形式。下面先介绍一些引理

2. 预备知识

引理 1.1 $M_{ij}^2=\dfrac{S_i^2+S_j^2+2S_iS_j\cos\theta_{ij}}{4}$，$1\le i<j\le n+1$。[1]

引理 1.2.1 若 $\theta_{ij}\le\frac{\pi}{2}$，$1\le i<j\le n+1$，则

$$\frac{M_{ij}^2}{S_i^2+S_j^2}\le\frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2},$$

等号成立的充要条件是 $S_i=S_j$。

证明： 由引理 1.1 有

$$\frac{M_{ij}^2}{S_i^2+S_j^2}=\frac{S_i^2+S_j^2+2S_iS_j\cos\theta_{ij}}{4(S_i^2+S_j^2)}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{2S_iS_j\cos\theta_{ij}}{S_i^2+S_j^2}\right)\le\frac{1}{4}(1+\cos\theta_{ij})=\frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2}。$$

引理 1.2.2 $\dfrac{M_{ij}^2}{(S_i+S_j)^2}\ge\dfrac{1}{4}\cos^2\dfrac{\theta_{ij}}{2}$，$1\le i<j\le n+1$。

等号成立的充要条件是 $S_i=S_j$。

证明： 由引理 1.1 有

$$\frac{M_{ij}^2}{(S_i+S_j)^2}=\frac{S_i^2+S_j^2+2S_iS_j+2S_iS_j\cos\theta_{ij}-2S_iS_j}{4(S_i+S_j)^2}=\frac{1}{4}-\frac{S_iS_j(1-\cos\theta_{ij})}{2(S_i+S_j)^2}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{S_iS_j}{(S_i+S_j)^2}\sin^2\frac{\theta_{ij}}{2}\ge\frac{1}{4}(1-\sin^2\frac{\theta_{ij}}{2})=\frac{1}{4}\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2}。$$

再对引理 1.2.2 运用均值不等式可得

引理 1.2.3 $\dfrac{M_{ij}^2}{S_iS_j}\ge\cos^2\dfrac{\theta_{ij}}{2}$，$1\le i<j\le n+1$。

等号成立的充要条件是 $S_i=S_j$。

引理 1.3.1 $T_{ij}=\dfrac{2S_iS_j}{S_i+S_j}\cos\dfrac{\theta_{ij}}{2}$，$1\le i<j\le n+1$。[2]

引理 1.3.2 $T_{ij}^2\le S_iS_j\cos^2\dfrac{\theta_{ij}}{2}$，$1\le i<j\le n+1$。

等号成立的充要条件是 $S_i=S_j$。

证明：对引理 1.3.1 运用幂平均不等式可得

$$T_{ij}=\frac{2S_iS_j}{S_i+S_j}\cos\frac{\theta_{ij}}{2}\le\sqrt{S_iS_j}\cos\frac{\theta_{ij}}{2},$$

对上式两边平方即可证得命题。

若 $\theta_{ij}\le\dfrac{\pi}{2}$，$1\le i<j\le n+1$，由引理 1.2.1 和引理 1.3.2 有

$$\frac{(M_{ij}+T_{ij})^2}{2}\le M_{ij}^2+T_{ij}^2\le\frac{S_i^2+S_j^2}{2}\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2}+S_iS_j\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2}=\frac{(S_i+S_j)^2}{2}\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2},$$

对上式进行整理即有

引理 1.4.1 若 $\theta_{ij}\le\dfrac{\pi}{2}$，$1\le i<j\le n+1$，则

$$\frac{M_{ij}^2+T_{ij}^2}{(S_i+S_j)^2}\le\frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2},$$

等号成立的充要条件是 $S_i=S_j$。

引理 1.4.2 若 $\theta_{ij}\le\dfrac{\pi}{2}$，$1\le i<j\le n+1$，则

$$\frac{M_{ij}+T_{ij}}{S_i+S_j}\le\cos\frac{\theta_{ij}}{2},$$

等号成立的充要条件是 $S_i=S_j$。

引理 1.4.3 若 $\theta_{ij}\le\dfrac{\pi}{2}$，$1\le i<j\le n+1$，则

$$\left(\frac{M_{ij}+T_{ij}}{S_i+S_j}\right)^2\le\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2},$$

等号成立的充要条件是 $S_i=S_j$。

文[3]给出了以下引理

引理 2.1 $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n+1}x_ix_j\cos\theta_{ij}\le\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2$，

等号成立的充要条件是 $\dfrac{x_1}{S_1}=\dfrac{x_2}{S_2}=\cdots=\dfrac{x_{n+1}}{S_{n+1}}$。

设 n 维单形 Ω 的内心为 I，内切球半径为 r，n 维单形 Ω' 为 n 维单形 Ω 的切点单形，Ω' 的重心为 G'，$l=IG'$，则

引理 2.2 $\sum\limits_{1\le i<j\le n+1}\cos^2\dfrac{\theta_{ij}}{2}=\dfrac{(r^2-l^2)(n+1)^2}{4r^2}$。

对引理 2.2 运用幂平均不等式可得

引理 2.3 $\sum\limits_{1\le i<j\le n+1}\cos\dfrac{\theta_{ij}}{2}\le\sqrt{\dfrac{n(n+1)^3(r^2-l^2)}{8r^2}}$，

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形。

引理 2.4 $\sum\limits_{1\le i<j\le n+1}x_ix_j\cos^2\dfrac{\theta_{ij}}{2}\le\dfrac{1}{4}\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i\right)^2$，

等号成立的充要条件是 $\dfrac{x_1}{S_1}=\dfrac{x_2}{S_2}=\cdots=\dfrac{x_{n+1}}{S_{n+1}}$。

证明： 由引理 2.1 有

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}x_ix_j\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le n+1}x_ix_j(1+\cos\theta_{ij})\le\frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le n+1}x_ix_j+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2=\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^2。$$

引理 2.5 $\sum\limits_{1\le i<j\le n+1}x_ix_j\cos\dfrac{\theta_{ij}}{2}\le\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{8}}\sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i^2$，

等号成立的充要条件是所有的 $x_ix_j\cos\dfrac{\theta_{ij}}{2}\,(1\le i<j\le n+1)$ 均相等且 $\dfrac{x_1^2}{S_1}=\dfrac{x_2^2}{S_2}=\cdots=\dfrac{x_{n+1}^2}{S_{n+1}}$。

证明： 对引理 2.4 作变换：$x_i\to x_i^2\,(i=1,2,\ldots,n+1)$ 并运用幂平均不等式，则有

$$\left(\frac{\sum\limits_{1\le i<j\le n+1}x_ix_j\cos\dfrac{\theta_{ij}}{2}}{\dfrac{n(n+1)}{2}}\right)^2\le\frac{\sum\limits_{1\le i<j\le n+1}x_i^2x_j^2\cos^2\dfrac{\theta_{ij}}{2}}{\dfrac{n(n+1)}{2}}\le\frac{\dfrac{1}{4}\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i^2\right)^2}{\dfrac{n(n+1)}{2}},$$

对上式进行整理即可证得命题。

3. 主要结论

由引理 1.2.1 和引理 2.2 即可得到

定理 1.1.1 n 维单形 Ω 的内心为 I，内切球半径为 r，n 维单形 Ω' 为 n 维单形 Ω 的切点单形，Ω' 的重心为 G'，$l=IG'$，若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\dfrac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{M_{ij}^2}{S_i^2+S_j^2}\le\frac{(r^2-l^2)(n+1)^2}{8r^2},$$

等号成立的充要条件是 $S_1=S_2=\cdots=S_{n+1}$。

对定理 1.1.1 运用 Cauchy 不等式可得

定理 1.1.2 n 维单形 Ω 的内心为 I，内切球半径为 r，n 维单形 Ω' 为 n 维单形 Ω 的切点单形，Ω' 的重心为 G'，$l=IG'$，若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\dfrac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{S_i^2+S_j^2}{M_{ij}^2}\ge\frac{2n^2r^2}{r^2-l^2},$$

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形。

由引理 1.2.1 和引理 2.4 即可得到

定理 1.2.1 若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\frac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{x_ix_jM_{ij}^2}{S_i^2+S_j^2}\le\frac{1}{8}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^2,$$

等号成立的充要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$ 且 $S_1=S_2=\cdots=S_{n+1}$。

对定理 1.2.1 运用 Cauchy 不等式可得

定理 1.2.2 若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\frac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{S_i^2+S_j^2}{x_ix_jM_{ij}^2}\ge\frac{2n^2(n+1)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^2},$$

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

定理 1.1.1、定理 1.1.2、定理 1.2.1 和定理 1.2.2 均为命题 1 的加强形式。

定理 1.3 若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\frac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}x_ix_jM_{ij}\le\sqrt{\frac{n}{8}\sum_{i=1}^{n+1}S_i^2\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2\right)},$$

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_0=x_1=x_2=\cdots=x_n$。

证明：对定理 1.2.1 两边乘以 $\sum_{1\le i<j\le n+1}(S_i^2+S_j^2)$ 再运用 Cauchy 不等式得

$$(\sum_{1\le i<j\le n+1}\sqrt{x_ix_j}M_{ij})^2\le\left(\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{x_ix_jM_{ij}^2}{S_i^2+S_j^2}\right)\sum_{1\le i<j\le n+1}(S_i^2+S_j^2)\le\frac{n}{8}\left(\sum_{i=1}^{n+1}S_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^2,$$

对上式两边开平方并作变换：$x_i\to x_i^2(i=1,2,...,n+1)$ 即可证得命题。

对定理 1.2.1 作变换：$x_i\to\frac{x_i}{h_i^2}(i=1,2,...,n+1)$，则有

定理 1.4.1 若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\frac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{x_ix_jM_{ij}^2}{h_i^2+h_j^2}\le\frac{n^2V^2}{8}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{h_i^2}\right)^2,$$

等号成立的充要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$ 且 $h_1=h_2=\cdots=h_{n+1}$。

对定理 1.2.2 作变换：$x_i\to\frac{x_i}{h_i^2}(i=1,2,...,n+1)$，则有

定理 1.4.2 若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\frac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{h_i^2+h_j^2}{x_ix_jM_{ij}^2}\ge\frac{2(n+1)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{h_i^2}\right)^2V^2},$$

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

由引理 1.4.1 和引理 2.2 即可得到

定理 2.1.1 n 维单形 Ω 的内心为 I，内切球半径为 r，n 维单形 Ω' 为 n 维单形 Ω 的切点单形，Ω' 的重心为 G'，$l=IG'$，若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\frac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{M_{ij}^2+T_{ij}^2}{(S_i+S_j)^2}\le\frac{(r^2-l^2)(n+1)^2}{8r^2},$$

等号成立的充要条件是 $S_1=S_2=\cdots=S_{n+1}$。

对定理 2.1.1 运用 Cauchy 不等式可得

定理 2.1.2 n 维单形 Ω 的内心为 I，内切球半径为 r，n 维单形 Ω' 为 n 维单形 Ω 的切点单形，Ω' 的重心为 G'，$l=IG'$，若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\frac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{(S_i+S_j)^2}{M_{ij}^2+T_{ij}^2}\ge\frac{2n^2r^2}{r^2-l^2},$$

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形。

由引理 1.4.1 和引理 2.4 即可得到

定理 2.2.1 若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\frac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}x_ix_j\frac{M_{ij}^2+T_{ij}^2}{(S_i+S_j)^2}\le\frac{1}{8}\left(\sum_{i=0}^{n}x_i\right)^2,$$

等号成立的充要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$ 且 $S_1=S_2=\cdots=S_{n+1}$。

对定理 2.2.1 运用 Cauchy 不等式可得

定理 2.2.2 若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\frac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{(S_i+S_j)^2}{x_ix_j(M_{ij}^2+T_{ij}^2)}\ge\frac{2n^2(n+1)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^2},$$

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

定理 2.1.1、定理 2.1.2、定理 2.2.1 和定理 2.2.2 均为命题 2 的加强形式。

对定理 2.2.1 作变换：$x_i\to\frac{x_i}{h_i^2}(i=1,2,...,n+1)$，则有

定理 2.3.1 若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\frac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j \frac{M_{ij}^2+T_{ij}^2}{(h_i+h_j)^2} \le \frac{n^2V^2}{8}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x_i}{h_i^2}\right)^2,$$

等号成立的充要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$ 且 $h_1=h_2=\cdots=h_{n+1}$。

对定理 2.2.2 作变换：$x_i \to \dfrac{x_i}{h_i^2}(i=1,2,...,n+1)$，则有

定理 2.3.2 若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\dfrac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1} \frac{(h_i+h_j)^2}{x_i x_j (M_{ij}^2+T_{ij}^2)} \ge \frac{2(n+1)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{h_i^2}\right)^2 V^2},$$

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

由引理 1.4.3 和引理 2.2 即可得到

定理 3.1.1 n 维单形 Ω 的内心为 I，内切球半径为 r，n 维单形 Ω' 为 n 维单形 Ω 的切点单形，Ω' 的重心为 G'，$l=IG'$，若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\dfrac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\left(\frac{M_{ij}+T_{ij}}{S_i+S_j}\right)^2 \le \frac{(r^2-l^2)(n+1)^2}{4r^2},$$

等号成立的充要条件是 $S_1=S_2=\cdots=S_{n+1}$。

对定理 3.1.1 运用 Cauchy 不等式可得

定理 3.1.2 n 维单形 Ω 的内心为 I，内切球半径为 r，n 维单形 Ω' 为 n 维单形 Ω 的切点单形，Ω' 的重心为 G'，$l=IG'$，若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\dfrac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\left(\frac{S_i+S_j}{M_{ij}+T_{ij}}\right)^2 \ge \frac{n^2r^2}{r^2-l^2},$$

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形。

由引理 1.4.3 和引理 2.4 即可得到

定理 3.2.1 若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\dfrac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j\left(\frac{M_{ij}+T_{ij}}{S_i+S_j}\right)^2 \le \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^2,$$

等号成立的充要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$ 且 $S_1=S_2=\cdots=S_{n+1}$。

对定理 3.2.1 运用 Cauchy 不等式可得

定理 3.2.2 若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\dfrac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{(S_i+S_j)^2}{x_ix_j(M_{ij}+T_{ij})^2}\ge\frac{n^2(n+1)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^2},$$

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

对定理 3.2.1 作变换：$x_i\to\frac{x_i}{h_i^2}(i=1,2,...,n+1)$，则有

定理 3.3.1 若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\frac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}x_ix_j\left(\frac{M_{ij}+T_{ij}}{h_i+h_j}\right)^2\le\frac{n^2V^2}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{h_i^2}\right)^2,$$

等号成立的充要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$ 且 $h_1=h_2=\cdots=h_{n+1}$。

对定理 3.2.2 作变换：$x_i\to\frac{x_i}{h_i^2}(i=1,2,...,n+1)$，则有

定理 3.3.2 若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\frac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{(h_i+h_j)^2}{x_ix_j(M_{ij}+T_{ij})^2}\ge\frac{(n+1)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{h_i^2}\right)^2V^2},$$

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

由引理 1.4.2 和引理 2.3 即可得到

定理 4.1.1 n 维单形 Ω 的内心为 I，内切球半径为 r，n 维单形 Ω' 为 n 维单形 Ω 的切点单形，Ω' 的重心为 G'，$l=IG'$，若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\frac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{M_{ij}+T_{ij}}{S_i+S_j}\le\sqrt{\frac{n(n+1)^3(r^2-l^2)}{8r^2}},$$

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形。

对定理 4.1.1 运用 Cauchy 不等式可得

定理 4.1.2 n 维单形 Ω 的内心为 I，内切球半径为 r，n 维单形 Ω' 为 n 维单形 Ω 的切点单形，Ω' 的重心为 G'，$l=IG'$，若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\frac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{S_i+S_j}{M_{ij}+T_{ij}}\ge\sqrt{\frac{n^3(n+1)r^2}{2(r^2-l^2)}},$$

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形。

由引理 1.4.2 和引理 2.5 即可得到

定理 4.2 若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\frac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j \left(\frac{M_{ij}+T_{ij}}{S_i+S_j}\right) \le \sqrt{\frac{n(n+1)}{8}} \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 ,$$

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$。

对定理 4.2 作变换：$x_i \to \dfrac{x_i}{h_i} (i=1,2,\ldots,n+1)$，则有

定理 4.3 若 n 维单形 Ω 的全体二面角均小于等于 $\dfrac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j \left(\frac{M_{ij}+T_{ij}}{h_i+h_j}\right) \le \sqrt{\frac{n^3(n+1)}{8}} V \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 ,$$

等号成立的充要条件是 n 维单形 Ω 为正则单形且 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$。

由引理 1.2.2 和引理 2.2 即可得到

定理 5 n 维单形 Ω 的内心为 I，内切球半径为 r，n 维单形 Ω' 为 n 维单形 Ω 的切点单形，Ω' 的重心为 G'，$l = IG'$，则

$$\sum_{1\le i<j\le n+1} \frac{M_{ij}^2}{(S_i+S_j)^2} \ge \frac{(r^2-l^2)(n+1)^2}{16r^2} ,$$

等号成立的充要条件是 $S_1 = S_2 = \cdots = S_{n+1}$。

4. 相关推论

定理 6 $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j M_{ij}^2 \le \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i S_i^2\right)$，

等号成立的充要条件是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$。

证明：由引理 1.1 和引理 2.1 有

$$\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j M_{ij}^2 = \frac{1}{4}\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j (S_i^2+S_j^2) + \frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j S_i S_j \cos\theta_{ij}$$
$$\le \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n+1} x_i \left(\sum_{j=1}^{n+1} x_j - x_i\right) S_i^2 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 S_i^2 = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i S_i^2\right)。$$

对定理 6 作变换：$x_i \to x_i S_i^x (i=1,2,\ldots,n+1)$，则有

推论 1.1 $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j S_i^x S_j^x M_{ij}^2 \le \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i S_i^x\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i S_i^{x+2}\right)$，

等号成立的充要条件是 $x_1 S_1^x = x_2 S_2^x = \cdots = x_{n+1} S_{n+1}^x$。

在推论 1.1 中，分别令 $x=-1$ 和 $x=-2$，则有

推论 1.1.1 $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n+1} \frac{x_i x_j M_{ij}^2}{S_i S_j} \le \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{S_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i S_i\right)$，

等号成立的充要条件是 $\dfrac{x_1}{S_1} = \dfrac{x_2}{S_2} = \cdots = \dfrac{x_{n+1}}{S_{n+1}}$。

推论 1.1.2 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{x_i x_j M_{ij}^2}{S_i^2 S_j^2}\le\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{S_i^2}\right)$,

等号成立的充要条件是 $\frac{x_1}{S_1^2}=\frac{x_2}{S_2^2}=\cdots=\frac{x_{n+1}}{S_{n+1}^2}$。

在推论 1.1.1 中，令 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}=1$，再由引理 1.2.3 和引理 2.2 可得

推论 1.1.3 n 维单形 Ω 的内心为 I，内切球半径为 r，n 维单形 Ω' 为 n 维单形 Ω 的切点单形，Ω' 的重心为 G'，$l=IG'$，则

$$\frac{(r^2-l^2)(n+1)^2}{4r^2}\le\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{M_{ij}^2}{S_i S_j}\le\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1}S_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{S_i}\right)。$$

等号成立的充要条件是 $S_1=S_2=\cdots=S_{n+1}$ 且 Ω 的内心与 Ω' 的重心重合。

对定理 6 作变换：$x_i\to x_i h_i^2\,(i=1,2,...,n+1)$，则有

推论 1.2 $\sum_{1\le i<j\le n+1}x_i x_j h_i^2 h_j^2 M_{ij}^2\le\frac{n^2V^2}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i h_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)$,

等号成立的充要条件是 $x_1h_1^2=x_2h_2^2=\cdots=x_{n+1}h_{n+1}^2$。

对推论 1.2 作变换：$x_i\to x_i h_i^{x-2}\,(i=1,2,...,n+1)$，则有

推论 1.3 $\sum_{1\le i<j\le n+1}x_i x_j h_i^x h_j^x M_{ij}^2\le\frac{n^2V^2}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i h_i^x\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i h_i^{x-2}\right)$,

等号成立的充要条件是 $x_1h_1^x=x_2h_2^x=\cdots=x_{n+1}h_{n+1}^x$。

在推论 1.3 中，分别令 $x=0$、$x=1$、$x=-(n-1)$，则有

推论 1.3.1 $\sum_{1\le i<j\le n+1}x_i x_j M_{ij}^2\le\frac{n^2V^2}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{h_i^2}\right)$,

等号成立的充要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$。

推论 1.3.2 $\sum_{1\le i<j\le n+1}x_i x_j h_i h_j M_{ij}^2\le\frac{n^2V^2}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i h_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{h_i}\right)$,

等号成立的充要条件是 $x_1h_1=x_2h_2=\cdots=x_{n+1}h_{n+1}$。

推论 1.3.3 $\sum_{1\le i<j\le n+1}\frac{x_i x_j M_{ij}^2}{h_i^{n-1}h_j^{n-1}}\le\frac{n^2V^2}{4}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{h_i^{n-1}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{h_i^{n+1}}\right)$,

等号成立的充要条件是 $\frac{x_1}{h_1^{n-1}}=\frac{x_2}{h_2^{n-1}}=\cdots=\frac{x_{n+1}}{h_{n+1}^{n-1}}$。

推论 2.1 $\sum_{1\le i<j\le n+1}x_i x_j S_i^x S_j^x M_{ij}\le\sqrt{\frac{n(n+1)}{8}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2 S_i^{2x}\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2 S_i^{2x+2}\right)}$,

等号成立的充要条件是 $x_1S_1^x=x_2S_2^x=\cdots=x_{n+1}S_{n+1}^x$ 且 n 维单形 Ω 的各中面面积均相等。

证明：对定理 6 作变换：$x_i\to x_i^2 S_i^{2x}\,(i=1,2,...,n+1)$ 并运用幂平均不等式，则有

$$\left(\frac{\sum\limits_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j S_i^x S_j^x M_{ij}}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^2 \le \frac{\sum\limits_{1\le i<j\le n+1} x_i^2 x_j^2 S_i^{2x} S_j^{2x} M_{ij}^2}{\frac{n(n+1)}{2}} \le \frac{\frac{1}{4}\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^2 S_i^{2x}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^2 S_i^{2x+2}\right)}{\frac{n(n+1)}{2}},$$

对上式进行整理即可证得命题。

在推论 2.1 中，分别令 $x=0$ 、 $x=-\frac{1}{2}$ 、 $x=-1$ ，则有

推论 2.1.1 $\sum\limits_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j M_{ij} \le \sqrt{\frac{n(n+1)}{8}\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^2 S_i^2\right)}$ ，

等号成立的充要条件是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$ 且 n 维单形 Ω 的各中面面积均相等。

推论 2.1.2 $\sum\limits_{1\le i<j\le n+1} \frac{x_i x_j M_{ij}}{\sqrt{S_i S_j}} \le \sqrt{\frac{n(n+1)}{8}\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^2 S_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{x_i^2}{S_i}\right)}$ ，

等号成立的充要条件是 $\frac{x_1^2}{S_1} = \frac{x_2^2}{S_2} = \cdots = \frac{x_{n+1}^2}{S_{n+1}}$ 且 n 维单形 Ω 的各中面面积均相等。

推论 2.1.3 $\sum\limits_{1\le i<j\le n+1} \frac{x_i x_j M_{ij}}{S_i S_j} \le \sqrt{\frac{n(n+1)}{8}\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{x_i^2}{S_i^2}\right)}$ ，

等号成立的充要条件是 $\frac{x_1}{S_1} = \frac{x_2}{S_2} = \cdots = \frac{x_{n+1}}{S_{n+1}}$ 且 n 维单形 Ω 的各中面面积均相等。

对推论 2.1.1 作变换： $x_i \to x_i h_i (i=1,2,...,n+1)$ ，则有

推论 2.2 $\sum\limits_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j h_i h_j M_{ij} \le \frac{nV}{2}\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^2 h_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^2\right)}$ ，

等号成立的充要条件是 $x_1 h_1 = x_2 h_2 = \cdots = x_{n+1} h_{n+1}$ 且 n 维单形 Ω 的各中面面积均相等。

对推论 2.2 作变换： $x_i \to x_i h_i^{x-1} (i=1,2,...,n+1)$ ，则有

推论 2.3 $\sum\limits_{1\le i<j\le n+1} x_i x_j h_i^x h_j^x M_{ij} \le \frac{nV}{2}\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^2 h_i^{2x}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^2 h_i^{2x-2}\right)}$ ，

等号成立的充要条件是 $x_1 h_1^x = x_2 h_2^x = \cdots = x_{n+1} h_{n+1}^x$ 且 n 维单形 Ω 的各中面面积均相等。

在推论 2.3 中，令 $x=-\frac{n-1}{2}$ ，则有

推论 2.4 $\sum\limits_{1\le i<j\le n+1} \frac{x_i x_j M_{ij}}{h_i^{\frac{n-1}{2}} h_j^{\frac{n-1}{2}}} \le \frac{nV}{2}\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{x_i^2}{h_i^{n-1}}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{x_i^2}{h_i^{n+1}}\right)}$ ，

等号成立的充要条件是 $\frac{x_1^2}{h_1^{n-1}} = \frac{x_2^2}{h_2^{n-1}} = \cdots = \frac{x_{n+1}^2}{h_{n+1}^{n-1}}$ 且 n 维单形 Ω 的各中面面积均相等。

参考文献

[1] 胡国华,周永国.关于单形中面的几个不等式[J].湖南理工学院学报(自然科学版),2010,23(03):6-8.

[2] 苏化明.关于单形二面角平分面面积的不等式[J].数学杂志,1992,(03):315-318.
[3] 杨世国,王佳.关于单形二面角平分面面积的一类不等式[J].重庆师范学院学报(自然科学版),1996,(01):47-50.