有关单形二面角余弦的几个行列式

李兴源，lihpb@qq.com

摘　要

本文通过单形射影定理，给出有关n维单形二面角余弦分别与高、棱面角、角平分面和中面有关的行列式。

关键词

n维单形，二面角，余弦，行列式

Several Determinants about the Cosine of Dihedral Angles in N-Simplex

Xingyuan Li，lihpb@qq.com

Abstract

This article provides determinants related to the cosine of the dihedral angles in the n-simplex and its heights, line-plane angles, bisection planes of dihedral angles and middle sections respectively through the simplex projection theorem.

Keywords

N-Simplex, Dihedral Angles, Cosine, Determinant

---

1. 引言

本文将证明以下结论：

定理 1 在 n 维单形 $A_0A_1A_2\ldots A_n$ 中，各顶点 A_i 所对的 $n-1$ 维侧面为 S_i，垂直于底面 S_i 的高为 h_i，S_i 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij}，i、$j\in\{0,1,2,\ldots,n\}$ 且 $i\neq j$，$\theta_{ij}=\theta_{ji}$，则：

$$\begin{vmatrix} h_0\cos\theta_{01}-h_1 & h_0\cos\theta_{02} & \ldots & h_0\cos\theta_{0n} \\ h_0\cos\theta_{01} & h_0\cos\theta_{02}-h_2 & \ldots & h_0\cos\theta_{0n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_0\cos\theta_{01} & h_0\cos\theta_{02} & \ldots & h_0\cos\theta_{0n}-h_n \end{vmatrix}=0\text{。}$$

定理 2 在 n 维单形 $A_0A_1A_2\ldots A_n$ 中，任意两顶点 A_i、A_j 所对的 $n-1$ 维侧面分别为 S_i、S_j，S_i 与 S_j 所夹的二面角平分面与 A_iA_j 交于 T_{ij}，S_i 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij}，$0\le i<j\le n$，则：

$$
\begin{vmatrix}
A_0T_{01}\cdot\cos\theta_{01}-A_1T_{01} & A_0T_{02}\cdot\cos\theta_{02} & \dots & A_0T_{0n}\cdot\cos\theta_{0n} \\
A_0T_{01}\cdot\cos\theta_{01} & A_0T_{02}\cdot\cos\theta_{02}-A_2T_{02} & \dots & A_0T_{0n}\cdot\cos\theta_{0n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
A_0T_{01}\cdot\cos\theta_{01} & A_0T_{02}\cdot\cos\theta_{02} & \dots & A_0T_{0n}\cdot\cos\theta_{0n}-A_nT_{0n}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
A_0T_{01}\cdot\cos\theta_{01}-A_1T_{01} & A_0T_{01}\cdot\cos\theta_{02} & \dots & A_0T_{01}\cdot\cos\theta_{0n} \\
A_0T_{02}\cdot\cos\theta_{01} & A_0T_{02}\cdot\cos\theta_{02}-A_2T_{02} & \dots & A_0T_{02}\cdot\cos\theta_{0n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
A_0T_{0n}\cdot\cos\theta_{01} & A_0T_{0n}\cdot\cos\theta_{02} & \dots & A_0T_{0n}\cdot\cos\theta_{0n}-A_nT_{0n}
\end{vmatrix}=0\text{。}
$$

定理 3 在n维单形$A_0A_1A_2...A_n$中，任意两顶点A_i、A_j所对的$n-1$维侧面分别为S_i、S_j，用$<A_iA_j,S_i>$、$<A_iA_j,S_j>$表示A_iA_j分别与S_i、S_j所成的棱面角，S_i与S_j所夹的二面角为θ_{ij}，$0\le i<j\le n$，则：

$$
\begin{vmatrix}
x_1\cos\theta_{01}-y_1 & x_2\cos\theta_{02} & \dots & x_n\cos\theta_{0n} \\
x_1\cos\theta_{01} & x_2\cos\theta_{02}-y_2 & \dots & x_n\cos\theta_{0n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_1\cos\theta_{01} & x_2\cos\theta_{02} & \dots & x_n\cos\theta_{0n}-y_n
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
x_1\cos\theta_{01}-y_1 & x_1\cos\theta_{02} & \dots & x_1\cos\theta_{0n} \\
x_2\cos\theta_{01} & x_2\cos\theta_{02}-y_2 & \dots & x_2\cos\theta_{0n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_n\cos\theta_{01} & x_n\cos\theta_{02} & \dots & x_n\cos\theta_{0n}-y_n
\end{vmatrix}=0,
$$

其中

$$
\begin{cases} x_i=\sin<A_0A_i,S_0> \\ y_i=\sin<A_0A_i,S_i> \end{cases}，\ 1\le i\le n\text{。}
$$

定理 4 在n维单形$A_0A_1A_2...A_n$中，任意两顶点A_i、A_j所对的$n-1$维侧面分别为S_i、S_j，S_i与S_j所夹的中面为M_{ij}，用$<S_i,M_{ij}>$、$<S_j,M_{ij}>$表示S_i、S_j分别与中面M_{ij}的夹角，S_i与S_j所夹的二面角为θ_{ij}，$0\le i<j\le n$，则：

$$
\begin{vmatrix}
x_1\cos\theta_{01}-y_1 & x_2\cos\theta_{02} & \dots & x_n\cos\theta_{0n} \\
x_1\cos\theta_{01} & x_2\cos\theta_{02}-y_2 & \dots & x_n\cos\theta_{0n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_1\cos\theta_{01} & x_2\cos\theta_{02} & \dots & x_n\cos\theta_{0n}-y_n
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
x_1\cos\theta_{01}-y_1 & x_1\cos\theta_{02} & \dots & x_1\cos\theta_{0n} \\
x_2\cos\theta_{01} & x_2\cos\theta_{02}-y_2 & \dots & x_2\cos\theta_{0n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_n\cos\theta_{01} & x_n\cos\theta_{02} & \dots & x_n\cos\theta_{0n}-y_n
\end{vmatrix}=0,
$$

其中

$$\begin{cases} x_i = \sin < S_0, M_{ij} > \\ y_i = \sin < S_i, M_{ij} > \end{cases}，\ 1 \le i \le n\text{。}$$

2. 预备知识

引理 1 在 n 维单形 $A_0A_1A_2...A_n$ 中，任意两顶点 A_i、A_j 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积分别为 S_i、S_j，S_i 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij}，i、$j \in \{0,1,2,...,n\}$ 且 $i \ne j$，$\theta_{ij} = \theta_{ji}$，则：

$$S_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j \ne i}}^{n} S_j \cos\theta_{ij}\text{。}$$ [1]

引理 2 在 n 维单形 $A_0A_1A_2...A_n$ 中，任意两顶点 A_i、A_j 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积分别为 S_i、S_j，垂直于底面 S_i、S_j 的高分别为 h_i、h_j，i、$j \in \{0,1,2,...,n\}$ 且 $i \ne j$，则：

$$\frac{S_i}{S_j} = \frac{h_j}{h_i}\text{。}$$

引理 3 在 n 维单形 $A_0A_1A_2...A_n$ 中，任意两顶点 A_i、A_j 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积分别为 S_i、S_j，S_i 与 S_j 所夹的二面角平分面与 A_iA_j 交于 T_{ij}，$0 \le i < j \le n$，则：

$$\frac{S_i}{S_j} = \frac{A_jT_{ij}}{A_iT_{ij}}\text{。}$$ [2]

引理 4 在 n 维单形 $A_0A_1A_2...A_n$ 中，任意两顶点 A_i、A_j 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积分别为 S_i、S_j，用 $< A_iA_j, S_i >$、$< A_iA_j, S_j >$ 表示 A_iA_j 分别与 S_i、S_j 所成的棱面角，i、$j \in \{0,1,2,...,n\}$ 且 $i \ne j$，则：

$$\frac{S_i}{S_j} = \frac{\sin < A_iA_j, S_j >}{\sin < A_iA_j, S_i >}\text{。}$$

证明： 设 n 维单形 $A_0A_1A_2...A_n$ 的体积为 V。根据棱面角的性质有

$$V = \frac{S_i \cdot A_iA_j \cdot \sin < A_iA_j, S_i >}{n} = \frac{S_j \cdot A_iA_j \cdot \sin < A_iA_j, S_j >}{n}\text{。}$$

对上式进行整理即可证得命题。

引理 5 在 n 维单形 $A_0A_1A_2...A_n$ 中，任意两顶点 A_i、A_j 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积分别为 S_i、S_j，用 M_{ij} 表示 S_i 与 S_j 所夹的中面及其 $n-1$ 维体积，用 $< S_i, M_{ij} >$、$< S_j, M_{ij} >$ 表示 S_i、S_j 分别与中面 M_{ij} 的夹角，i、$j \in \{0,1,2,...,n\}$ 且 $i \ne j$，$M_{ij} = M_{ji}$，则：

$$\frac{S_i}{S_j} = \frac{\sin < S_j, M_{ij} >}{\sin < S_i, M_{ij} >}\text{。}$$

证明： 设 n 维单形 $A_0A_1A_2...A_n$ 的体积为 V，S_i 与 S_j 所交的 $n-2$ 维单形及其体积为 F_{ij}，i、$j \in \{0,1,2,...,n\}$ 且 $i \ne j$，$F_{ij} = F_{ji}$。根据单形中面的性质有

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{S_i \cdot M_{ij} \cdot \sin < S_i, M_{ij} >}{F_{ij}} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{S_j \cdot M_{ij} \cdot \sin < S_j, M_{ij} >}{F_{ij}} = \frac{V}{2}\text{。}$$ [3]

对上式进行整理即可证得命题。

3. 定理证明

由引理 1 可知

$$\begin{vmatrix} S_1\cos\theta_{01}-S_0 & S_2\cos\theta_{02} & \cdots & S_n\cos\theta_{0n} \\ S_1\cos\theta_{01} & S_2\cos\theta_{02}-S_0 & \cdots & S_n\cos\theta_{0n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1\cos\theta_{01} & S_2\cos\theta_{02} & \cdots & S_n\cos\theta_{0n}-S_0 \end{vmatrix}=0。$$

分别对上面行列式的第 i 列 $(i=0,1,2,...,n)$ 除以 S_i 可得

$$\begin{vmatrix} \cos\theta_{01}-\dfrac{S_0}{S_1} & \cos\theta_{02} & \cdots & \cos\theta_{0n} \\ \cos\theta_{01} & \cos\theta_{02}-\dfrac{S_0}{S_2} & \cdots & \cos\theta_{0n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\theta_{01} & \cos\theta_{02} & \cdots & \cos\theta_{0n}-\dfrac{S_0}{S_n} \end{vmatrix}=0。\quad (1)$$

将引理 2 代入到(1)可得

$$\begin{vmatrix} \cos\theta_{01}-\dfrac{h_1}{h_0} & \cos\theta_{02} & \cdots & \cos\theta_{0n} \\ \cos\theta_{01} & \cos\theta_{02}-\dfrac{h_2}{h_0} & \cdots & \cos\theta_{0n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\theta_{01} & \cos\theta_{02} & \cdots & \cos\theta_{0n}-\dfrac{h_n}{h_0} \end{vmatrix}=0。$$

然后对上面行列式的每一行均乘以 h_0 即可证得定理 1。

再将引理 3 代入到(1)中可得

$$\begin{vmatrix} \cos\theta_{01}-\dfrac{A_1T_{01}}{A_0T_{01}} & \cos\theta_{02} & \cdots & \cos\theta_{0n} \\ \cos\theta_{01} & \cos\theta_{02}-\dfrac{A_2T_{02}}{A_0T_{02}} & \cdots & \cos\theta_{0n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\theta_{01} & \cos\theta_{02} & \cdots & \cos\theta_{0n}-\dfrac{A_nT_{0n}}{A_0T_{0n}} \end{vmatrix}=0。$$

分别对上面行列式的第 i 行/第 i 列 $(i=0,1,2,...,n)$ 乘以 A_0T_{0i} 即可证得定理 2。

同理，将引理 4 和引理 5 分别代入到(1)中并整理即可分别证得定理 3 和定理 4。

参考文献

[1] 沈文选. 关于单形的几个含参几何不等式(英文)[J]. 数学理论与应用, 2000, 1: 88-94.

[2] 殷红彩, 张华民. E^n 中 n 维单形二面角的角平分面的性质[J]. 浙江大学学报（理学版）, 2012, 1: 18-19, 59.

[3] 胡国华, 周永国. 关于单形中面的几个不等式[J]. 湖南理工学院学报(自然科学版), 2010, 3: 6-8.