梳理一些常用不等式

阿鲁

2014 年 3 月 22 日

本文原本是为应付某刊物的约稿而写，然而后来却被该刊直接毙掉，既然如此，还不如直接发网上算了。温馨提示：不等式高手可以直接略过本文，因为本文没什么新鲜的不等式，纯粹是科普性质，入门读物。

1 凸

定义 1.1. 函数 $f(x)$ 在区间 D 内有定义，若对于任意的 $x_1, x_2 \in D$ 和任意的 $0 < \lambda < 1$，恒有

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \geqslant f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\big), \tag{1.1}$$

则称 $f(x)$ 在区间 D 内是下凸函数，简称下凸。若上述不等式反向恒成立，则称 $f(x)$ 在区间 D 内是上凸函数，简称上凸。

易见，当 $f(x)$ 下凸时，$-f(x)$ 上凸，故此下列有些性质中我们只讨论其中一种凸的情形，另一种通常就是反过来而已。

定理 1.1. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是下凸函数且存在最大值[①]，则 $f(x)$ 的最大值在 $x = a$ 或 $x = b$ 处取得，即 $f(x)_{\max} = \max\{f(a), f(b)\}$。

证明 假设 $f(a), f(b)$ 都不是 $f(x)$ 的最大值，则存在 $a < c < b$ 使 $f(c) > f(a)$ 且 $f(c) > f(b)$，由于总能找到 $0 < \lambda < 1$ 使 $c = \lambda a + (1-\lambda) b$，则

$$f(c) = \lambda f(c) + (1-\lambda) f(c) > \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \geqslant f\big(\lambda a + (1-\lambda) b\big) = f(c),$$

矛盾，故定理 1.1 得证。 □

在定义 1.1 中，若 $x_1 < x_2$，令 $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 = x$，则 $\lambda = \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2}$，代入式 (1.1) 中可得如下两式

$$\begin{aligned}
\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\big(f(x_1) - f(x_2)\big) &\geqslant f(x) - f(x_2), \\
\frac{x - x_1}{x_1 - x_2}\big(f(x_1) - f(x_2)\big) &\geqslant f(x) - f(x_1),
\end{aligned}$$

注意到 $x_1 < x < x_2$，故此由以上两式得到

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leqslant \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}. \tag{1.2}$$

式 (1.2) 中的任一不等式都可以作为下凸函数的等价定义。

[①] 其实“且存在最大值”这几个字是多余的，因为在上述定义下的凸函数一定连续，而闭区间上的连续函数必有最大值和最小值，不过这需要高等数学的内容来证明，这里不想扯太多，故此才加上这几个字。

定理 1.2. 设 $f(x)$ 在区间 D 内为下凸函数，$x, y \in D$, $x \leqslant y$，若 $h > 0$ 使得 $x-h, y+h \in D$，则有

$$f(x)+f(y) \leqslant f(x-h)+f(y+h). \tag{1.3}$$

证法一 若 $x=y$，则由下凸函数定义显然成立；若 $x<y$，则由式 (1.2) 得

$$\frac{f(x)-f(x-h)}{x-(x-h)} \leqslant \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant \frac{f(y)-f(y+h)}{y-(y+h)},$$

整理即得式 (1.3)，故定理 1.2 得证。 □

证法二 由下凸函数的定义得

$$f(x)=f\left(\frac{y-x+h}{y-x+2h}(x-h)+\frac{h}{y-x+2h}(y+h)\right) \leqslant \frac{y-x+h}{y-x+2h}f(x-h)+\frac{h}{y-x+2h}f(y+h),$$

$$f(y)=f\left(\frac{h}{y-x+2h}(x-h)+\frac{y-x+h}{y-x+2h}(y+h)\right) \leqslant \frac{h}{y-x+2h}f(x-h)+\frac{y-x+h}{y-x+2h}f(y+h),$$

两式相加即得式 (1.3)，故定理 1.2 得证。 □

通俗地说，定理 1.2 表明，在下凸函数中，若保持两变量之和不变，则拉大两者距离时两函数值之和不减。

定理 1.3 (琴生 (Jensen) 不等式)**.** 若 $f(x)$ 在区间 D 内是下凸函数，则对于任意的 $x_i \in D$ 和 $p_i > 0$（$i=1, 2, \ldots, n$）且 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$，都有

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \geqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right). \tag{1.4}$$

证明 当 $n=2$ 时即为式 (1.1)，式 (1.4) 成立；假设当 $n=k$ 时式 (1.4) 成立，即有

$$\sum_{i=1}^{k} p_i f(x_i) \geqslant f\left(\sum_{i=1}^{k} p_i x_i\right),$$

则当 $n=k+1$ 时，令 $p'_k=p_k+p_{k+1}$, $x'_k=\dfrac{p_k}{p'_k}\cdot x_k+\dfrac{p_{k+1}}{p'_k}\cdot x_{k+1}$，则易知 $x'_k \in D$，且 $p_k x_k+p_{k+1}x_{k+1}=p'_k x'_k$, $p_1+p_2+\cdots+p_{k-1}+p'_k=1$，由归纳假设，有

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{k+1} p_i x_i\right) &= f(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_{k-1}x_{k-1}+p'_k x'_k) \\
&\leqslant p_1 f(x_1)+p_2 f(x_2)+\cdots+p_{k-1}f(x_{k-1})+p'_k f(x'_k) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} p_i f(x_i)+(p_k+p_{k+1})f\left(\frac{p_k}{p_k+p_{k+1}}\cdot x_k+\frac{p_{k+1}}{p_k+p_{k+1}}\cdot x_{k+1}\right) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k-1} p_i f(x_i)+(p_k+p_{k+1})\left(\frac{p_k}{p_k+p_{k+1}}\cdot f(x_k)+\frac{p_{k+1}}{p_k+p_{k+1}}\cdot f(x_{k+1})\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} p_i f(x_i)+p_k f(x_k)+p_{k+1}f(x_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} p_i f(x_i),
\end{aligned}$$

可见当 $n=k+1$ 时式 (1.4) 也成立。

根据数学归纳法，式 (1.4) 成立，定理 1.3 得证。 □

将琴生不等式和定理 1.2 联合一起使用，还可以得到著名的半凹半凸定理，具体就不扯了，有兴趣的可以看这个帖子：`http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=55&t=64933`。

定理 1.4 (伯努利 (Bernoulli) 不等式). 对于任意实数 $x > -1$，当 $\alpha < 0$ 或 $\alpha > 1$ 时，恒有

$$(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x,$$

当 $0 < \alpha < 1$ 时，恒有

$$(1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x,$$

等号成立当且仅当 $x = 0$。

证明 令 $f(x) = (1+x)^\alpha - (1+\alpha x)$，其中 $x > -1$，求导有

$$f'(x) = \alpha\big((1+x)^{\alpha-1} - 1\big).$$

（1）当 $\alpha > 1$ 时，若 $x > 0$，则 $1+x > 1$ 且 $\alpha - 1 > 0$，因此有 $(1+x)^{\alpha-1} > 1$，即 $f'(x) > 0$；若 $0 > x > -1$，则 $1 > 1+x > 0$ 且 $\alpha - 1 > 0$，因此有 $(1+x)^{\alpha-1} < 1$，即 $f'(x) < 0$。由此可见当 $\alpha > 1$ 时 $f(x) \geqslant f(0) = 0$；

（2）当 $\alpha < 0$ 时，若 $x > 0$，则 $1+x > 1$ 且 $\alpha - 1 < 0$，因此有 $(1+x)^{\alpha-1} < 1$，即 $f'(x) > 0$；若 $0 > x > -1$，则 $1 > 1+x > 0$ 且 $\alpha - 1 < 0$，因此有 $(1+x)^{\alpha-1} > 1$，即 $f'(x) < 0$。由此可见当 $\alpha < 0$ 时 $f(x) \geqslant f(0) = 0$；

（3）当 $0 < \alpha < 1$ 时，若 $x > 0$，则 $1+x > 1$ 且 $\alpha - 1 < 0$，因此有 $(1+x)^{\alpha-1} < 1$，即 $f'(x) < 0$；若 $0 > x > -1$，则 $1 > 1+x > 0$ 且 $\alpha - 1 < 0$，因此有 $(1+x)^{\alpha-1} > 1$，即 $f'(x) > 0$。由此可见当 $\alpha < 0$ 时 $f(x) \leqslant f(0) = 0$。

综上所述，定理 1.4 得证。 □

例 1.1. 设 $a > 1$，用定义证明对数函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是上凸函数。

证明 对于任意的 $x_1, x_2, r_1, r_2 > 0$ 且 $r_1 + r_2 = 1$，则

$$\begin{aligned}\log_a(r_1x_1 + r_2x_2) \geqslant r_1\log_a x_1 + r_2\log_a x_2 &\iff r_1x_1 + r_2x_2 \geqslant x_1^{r_1}x_2^{r_2} \\ &\iff 1 + r_1\left(\frac{x_1}{x_2} - 1\right) \geqslant \left(1 + \frac{x_1}{x_2} - 1\right)^{r_1},\end{aligned}$$

由伯努利不等式知上式成立，故由凸函数定义知 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是上凸函数。 □

例 1.2. 设 $0 < \alpha < 1$，用定义证明幂函数 $y = x^\alpha$ 在 $[0, +\infty)$ 内是上凸函数。

证明 对于任意的 $x_1, x_2 \geqslant 0$ 及 $r_1, r_2 > 0$ 且 $r_1 + r_2 = 1$，令 $K = (r_1x_1^\alpha + r_2x_2^\alpha)^{1/\alpha}$，则易得

$$r_1\left(\frac{x_1}{K}\right)^\alpha + r_2\left(\frac{x_2}{K}\right)^\alpha = 1,$$

当 $0 < \alpha < 1$ 时，有 $\dfrac{1}{\alpha} > 1$，则由伯努利不等式，有

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{K} &= \left(1 + \left(\frac{x_1}{K}\right)^\alpha - 1\right)^{1/\alpha} \geqslant 1 + \frac{1}{\alpha}\left(\left(\frac{x_1}{K}\right)^\alpha - 1\right), \\ \frac{x_2}{K} &= \left(1 + \left(\frac{x_2}{K}\right)^\alpha - 1\right)^{1/\alpha} \geqslant 1 + \frac{1}{\alpha}\left(\left(\frac{x_2}{K}\right)^\alpha - 1\right),\end{aligned}$$

于是

$$r_1 \cdot \frac{x_1}{K} + r_2 \cdot \frac{x_2}{K} \geqslant r_1 + r_2 + \frac{1}{\alpha}\left(r_1\left(\frac{x_1}{K}\right)^\alpha + r_2\left(\frac{x_2}{K}\right)^\alpha - r_1 - r_2\right) = 1,$$

即

$$r_1x_1 + r_2x_2 \geqslant K,$$

所以

$$r_1x_1^\alpha + r_2x_2^\alpha \leqslant (r_1x_1 + r_2x_2)^\alpha,$$

故由凸函数定义知幂函数 $y = x^\alpha$ 在 $[0, +\infty)$ 内是上凸函数。 □

一般来说，用定义来证明一个函数是否凸通常是不太容易的，还好，我们可以证明，如果 $f(x)$ 二阶可导，则 $f(x)$ 下凸当且仅当 $f''(x) \geqslant 0$，不过具体证明又需要高等数学的内容，这里也不详细讲了，因为本文中还不曾用到二阶导数。

2 幂单调

定理 2.1. 任意给定 $x_i>0,\ i=1,\,2,\,\ldots,\,n$，定义函数

$$f(k)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^k\right)^{1/k},\quad k\neq 0,$$

则 $f(k)$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 内都是严格减函数。

证法一 当 $p>q>0$ 时，有

$$f(p)<f(q)\iff\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{q/p}<\sum_{i=1}^{n}x_i^q\iff 1<\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^p}{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}\right)^{q/p},\tag{2.1}$$

因为 $0<\dfrac{q}{p}<1$ 且 $0<\dfrac{x_i^p}{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}<1$，故

$$\left(\frac{x_i^p}{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}\right)^{q/p}>\frac{x_i^p}{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p},$$

从而式 (2.1) 显然成立，故 $f(k)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是严格减函数；

当 $p<q<0$ 同理可证，所以定理 2.1 得证。 □

证法二 记 $\exp(x)=e^x$，则

$$f(k)=\exp\left(\frac{1}{k}\ln\sum_{i=1}^{n}x_i^k\right),$$

故求导得

$$\begin{aligned}f'(k)&=\exp\left(\frac{1}{k}\ln\sum_{i=1}^{n}x_i^k\right)\cdot\frac{1}{k^2}\left(\frac{x_1^k\ln x_1+x_2^k\ln x_2+\cdots+x_n^k\ln x_n}{x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k}\cdot k-\ln\sum_{i=1}^{n}x_i^k\right)\\&=\frac{f(k)}{k^2}\left(\frac{x_1^k\ln x_1^k+x_2^k\ln x_2^k+\cdots+x_n^k\ln x_n^k}{x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k}-\ln\sum_{i=1}^{n}x_i^k\right),\end{aligned}$$

由例 1.1 知 $y=\ln x$ 为上凸函数，故由琴生不等式有

$$\frac{x_1^k\ln x_1^k+x_2^k\ln x_2^k+\cdots+x_n^k\ln x_n^k}{x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k}\leqslant\ln\frac{x_1^{2k}+x_2^{2k}+\cdots+x_n^{2k}}{x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k}<\ln\sum_{i=1}^{n}x_i^k,$$

从而得到 $f'(k)<0$，所以定理 2.1 得证。 □

通过求极限，还可以得到上述 $f(k)$ 的值域为 $(0,\min\{x_1,x_2,\ldots,x_n\})\cup(\max\{x_1,x_2,\ldots,x_n\},+\infty)$。

定理 2.2 (加权幂平均的单调性). 任意给定 $x_i>0,\ p_i>0$（$i=1,\,2,\,\ldots,\,n$）且 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$，定义函数

$$f(k)=\begin{cases}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^k\right)^{1/k}, & k\neq 0,\\ \displaystyle\prod_{i=1}^{n}x_i^{p_i}, & k=0,\end{cases}$$

则 $f(k)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的不减函数。

证明 由例 1.2 及琴生不等式可知，对于任意 $a_i>0,\ p_i>0$（$i=1,2,\dots,n$）且 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$，当 $0<\alpha<1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\alpha}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i\right)^{\alpha}. \tag{2.2}$$

下面对 k 的正负零分别讨论。

（1）令 $\alpha=\dfrac{k_1}{k_2}$ 且 $0<k_1<k_2,\ a_i=x_i^{k_2}$，代入式 (2.2) 中整理即得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^{k_1}\right)^{1/k_1}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^{k_2}\right)^{1/k_2}, \tag{2.3}$$

由此可见当 $k>0$ 时 $f(k)$ 为不减函数；

（2）令 $\alpha=\dfrac{k_2}{k_1}$ 且 $k_1<k_2<0,\ a_i=x_i^{k_1}$，代入式 (2.2) 中整理同样可得到式 (2.3)，由此可见当 $k<0$ 时 $f(k)$ 也为不减函数；

（3）考查 $f(k)$ 在 $k=0$ 处的连续性，我们有

$$\lim_{k\to0}f(k)=\lim_{k\to0}\exp\left(\frac{1}{k}\ln\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^{k}\right)=\exp\left(\lim_{k\to0}\frac{1}{k}\ln\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^{k}\right),$$

设

$$g(k)=\ln\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^{k},$$

则 $g(0)=\ln\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=0$，故

$$\lim_{k\to0}\frac{1}{k}\ln\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^{k}=\lim_{k\to0}\frac{g(k)-g(0)}{k-0},$$

这正好符合导数的定义，即

$$\lim_{k\to0}\frac{g(k)-g(0)}{k-0}=g'(0),$$

因为

$$g'(k)=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i^{k}}\cdot\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^{k}\ln x_i,$$

所以

$$\lim_{k\to0}\frac{1}{k}\ln\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^{k}=g'(0)=\sum_{i=1}^{n}p_i\ln x_i,$$

因此就有

$$\lim_{k\to0}f(k)=\exp\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\ln x_i\right)=\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i^{p_i}\right)=\prod_{i=1}^{n}x_i^{p_i}=f(0),$$

由此可见 $f(k)$ 在 $k=0$ 处是连续的。

综上所述，定理 2.2 得证。 □

在定理 2.2 中，由 $f(1)\geqslant f(0)$ 得 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i\geqslant\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{p_i}$，显然此式中的 x_i 可以取 0，于是得到：

推论 2.2.1 (加权均值不等式)**.** 对任意 $x_i \geqslant 0,\, p_i > 0$（$i = 1, 2, \ldots, n$）且 $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$，有

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geqslant \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}.$$

在定理 2.2 中，取各 $p_i = \dfrac{1}{n}$，再取 k 为整数，即得：

推论 2.2.2. 设 $a_i > 0,\, i = 1, 2, \ldots, n$，则

$$\begin{aligned}\cdots \geqslant \sqrt[3]{\frac{a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3}{n}} \geqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \\ \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \geqslant \sqrt{\frac{n}{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2}}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{n}{\frac{1}{a_1^3} + \frac{1}{a_2^3} + \cdots + \frac{1}{a_n^3}}} \geqslant \cdots\end{aligned}$$

3 赫尔德 (Hölder) 不等式

离散形式的 Hölder 不等式通常是指：

定理 3.1. 设 $p, q > 1$ 满足 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，任意 $a_i, b_i \geqslant 0,\, i = 1, 2, \ldots, n$，则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q} \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \tag{3.1}$$

在定理 3.1 中，若令 $a_i^p = x_i,\, b_i^q = y_i,\, \dfrac{1}{p} = \lambda,\, \dfrac{1}{q} = \mu$，则定理 3.1 等价于：

定理 3.1′. 设 $\lambda, \mu > 0$ 满足 $\lambda + \mu = 1$，任意 $x_i, y_i \geqslant 0,\, i = 1, 2, \ldots, n$，则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\lambda} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^{\mu} \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^{\lambda} y_i^{\mu}. \tag{3.2}$$

它们都有推广形式，以定理 3.1′ 为例，其推广形式为：

定理 3.2. 设 $x_{i,j} \geqslant 0,\, p_j > 0,\, i = 1, 2, \ldots, n,\, j = 1, 2, \ldots, m$，且 $p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1$，则有

$$\begin{aligned}&(x_{1,1} + x_{2,1} + \cdots + x_{n,1})^{p_1} (x_{1,2} + x_{2,2} + \cdots + x_{n,2})^{p_2} \cdots (x_{1,m} + x_{2,m} + \cdots + x_{n,m})^{p_m} \\ \geqslant\ & x_{1,1}^{p_1} x_{1,2}^{p_2} \ldots x_{1,m}^{p_m} + x_{2,1}^{p_1} x_{2,2}^{p_2} \ldots x_{2,m}^{p_m} + \cdots + x_{n,1}^{p_1} x_{n,2}^{p_2} \ldots x_{n,m}^{p_m},\end{aligned}$$

即

$$\prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}\right)^{p_j} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} x_{i,j}^{p_j}. \tag{3.3}$$

当 $m = 2$ 时定理 3.2 就是定理 3.1′。

习惯上，以上三个定理都可以称之为 Hölder 不等式，下面来证明推广的那个，也就是定理 3.2。

证明 记 $S_j = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i,j}$，如果存在某个 $S_j = 0$，则 $x_{1,j} = x_{2,j} = \cdots = x_{n,j} = 0$，此时式 (3.3) 两边都为 0，不等式成立；当所有 S_j 都不为 0 时

$$\text{式 (3.3)} \iff \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{j=1}^{m} x_{i,j}^{p_j}}{\prod\limits_{j=1}^{m} S_j^{p_j}} \leqslant 1 \iff \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{x_{i,j}}{S_j}\right)^{p_j} \leqslant 1,$$

由加权均值不等式有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{x_{i,j}}{S_j}\right)^{p_j}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(p_j\cdot\frac{x_{i,j}}{S_j}\right)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_j}{S_j}\cdot x_{i,j}\right)=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{p_j}{S_j}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_{i,j}\right)=\sum_{j=1}^{m}p_j=1,$$

从而式 (3.3) 成立。

综上所述，定理 3.2 得证。 □

Hölder 不等式还有积分形式，这里就不扯了，本文只讲离散形式的。

在定理 3.2 中，取各 $p_j=\dfrac{1}{m}$，即得：

推论 3.2.1 (卡尔松 (Carlson) 不等式)**.** 设 $x_{i,j}\geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, m$，则有

$$\begin{aligned}&(x_{1,1}+x_{2,1}+\cdots+x_{n,1})(x_{1,2}+x_{2,2}+\cdots+x_{n,2})(x_{1,m}+x_{2,m}+\cdots+x_{n,m})\\ \geqslant&\left(\sqrt[m]{x_{1,1}x_{1,2}\ldots x_{1,m}}+\sqrt[m]{x_{2,1}x_{2,2}\ldots x_{2,m}}+\cdots+\sqrt[m]{x_{n,1}x_{n,2}\ldots x_{n,m}}\right)^{m}.\end{aligned}$$

值得一提的是，卡尔松不等式也可以直接用均值不等式来证，具体过程见《数学空间》2013 年第 4 期（总第 14 期）最后一页。

另一个最常用的推论就是如下的：

推论 3.2.2 (权方和不等式)**.** 设 $x_i\geqslant 0$, $y_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$，则当 $m>0$ 或 $m<-1$ 时，有

$$\frac{x_1^{m+1}}{y_1^m}+\frac{x_2^{m+1}}{y_2^m}+\cdots+\frac{x_n^{m+1}}{y_n^m}\geqslant\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{m+1}}{(y_1+y_2+\cdots+y_n)^m},\tag{3.4}$$

当 $0>m>-1$ 时式 (3.4) 反向成立。

注：当指数非正时，约定底数的变量范围为正，下同。

证明 （1）当 $m>0$ 时，式 (3.4) 等价于

$$(y_1+y_2+\cdots+y_n)^{m/(m+1)}\left(\frac{x_1^{m+1}}{y_1^m}+\frac{x_2^{m+1}}{y_2^m}+\cdots+\frac{x_n^{m+1}}{y_n^m}\right)^{1/(m+1)}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

因为 $\dfrac{m}{m+1}>0$, $\dfrac{1}{m+1}>0$ 且 $\dfrac{m}{m+1}+\dfrac{1}{m+1}=1$，于是由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}&(y_1+y_2+\cdots+y_n)^{m/(m+1)}\left(\frac{x_1^{m+1}}{y_1^m}+\frac{x_2^{m+1}}{y_2^m}+\cdots+\frac{x_n^{m+1}}{y_n^m}\right)^{1/(m+1)}\\ \geqslant&\, y_1^{m/(m+1)}\cdot\left(\frac{x_1^{m+1}}{y_1^m}\right)^{1/(m+1)}+y_2^{m/(m+1)}\cdot\left(\frac{x_2^{m+1}}{y_2^m}\right)^{1/(m+1)}+\cdots+y_n^{m/(m+1)}\cdot\left(\frac{x_n^{m+1}}{y_n^m}\right)^{1/(m+1)}\\ =&\, x_1+x_2+\cdots+x_n,\end{aligned}$$

即式 (3.4) 成立；

（2）当 $m<-1$ 时，式 (3.4) 等价于

$$\frac{y_1^{-m}}{x_1^{-m-1}}+\frac{y_2^{-m}}{x_2^{-m-1}}+\cdots+\frac{y_n^{-m}}{x_n^{-m-1}}\geqslant\frac{(y_1+y_2+\cdots+y_n)^{-m}}{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{-m-1}},$$

因为 $-m-1>0$ 且 $-m=-m-1+1$，可见上述不等式已转化为（1）的情形，由于（1）已证出，故此时式 (3.4) 也成立；

（3）当 $0>m>-1$ 时，式 (3.4) 的反向不等式等价于

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{m+1}\cdot(y_1+y_2+\cdots+y_n)^{-m}\geqslant x_1^{m+1}\cdot y_1^{-m}+x_2^{m+1}\cdot y_2^{-m}+\cdots+x_n^{m+1}\cdot y_n^{-m},$$

因为 $m+1>0$, $-m>0$ 且 $m+1-m=1$，于是又由 Hölder 不等式即可知上式显然成立，故此时式 (3.4) 反向成立。

综上所述，推论 3.2.2 得证。 □

4 闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式

离散形式的闵可夫斯基不等式通常是指：

定理 4.1. 任意 $a_i, b_i \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n$，则当 $p \geqslant 1$ 时有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p}. \tag{4.1}$$

当 $0 < p < 1$ 或 $p < 0$ 时式 (4.1) 反向成立。

证明 式 (4.1) 等价于

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1-1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1-1/p} \geqslant \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p, \tag{4.2}$$

当 $p = 1$ 时为恒等式，成立；当 $p > 1$ 时，有 $\dfrac{1}{p} > 0, 1 - \dfrac{1}{p} > 0, \dfrac{1}{p} + 1 - \dfrac{1}{p} = 1$，故由 Hölder 不等式得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1-1/p} \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i (a_i + b_i)^{p-1},$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1-1/p} \geqslant \sum_{i=1}^{n} b_i (a_i + b_i)^{p-1},$$

两式相加即得式 (4.2)，故此时式 (4.1) 成立；

当 $0 < p < 1$ 或 $p < 0$ 时，有 $\dfrac{1}{p} - 1 > 0$ 或 $\dfrac{1}{p} - 1 < -1$，故由权方和不等式得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1-1/p} = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p-1}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(a_i + b_i)^{1-p}} = \sum_{i=1}^{n} a_i (a_i + b_i)^{p-1},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1-1/p} = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p-1}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{(a_i + b_i)^{1-p}} = \sum_{i=1}^{n} b_i (a_i + b_i)^{p-1},$$

两式相加即得式 (4.2) 的反向，故此时式 (4.1) 反向成立。

综上所述，定理 4.1 得证。 □

由绝对值不等式易知，当 p 为正偶数时，定理 4.1 的变量范围可取实数，而当 $p = 2$ 时定理 4.1 就是三角形不等式。此外，显然定理 4.1 还可以推广到 m 组数上，这里就不具体写出了。

5 排序不等式

定理 5.1. 若 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，设 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 是 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 的任一排列，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i c_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}.$$

证明 记 $S=\sum_{i=1}^{n} a_i c_i$，设 $i<j$，若 $c_i \geqslant c_j$，则 $(a_i-a_j)(c_i-c_j) \leqslant 0$，展开得 $a_i c_i + a_j c_j \leqslant a_i c_j + a_j c_i$，可见，如果 c_i, c_j 逆序，则交换 c_i, c_j 能使 S 不减，经过有限次将逆序的 c 交换的操作后必能使 S 变成左边的式子，即左边的不等式成立。右边同理。 □

推论 5.1.1 (切比雪夫 (Chebyshev) 不等式)**.** 若 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，则

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \geqslant n\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}.$$

证明 由排序不等式得

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant a_1 b_1 + a_2 b_n + a_3 b_{n-1} + \cdots + a_n b_2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}, \\
\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_n + \cdots + a_n b_3 \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}, \\
\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + \cdots + a_n b_4 \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}, \\
\vdots \\
\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + a_3 b_{n-2} + \cdots + a_n b_n \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}, \\
\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \cdots + a_n b_1 \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i},
\end{gathered}$$

n 式相加即得证。 □

排序不等式还可以推广到 m 组非负实数上，称为微微对偶不等式，由于证明较难，这里暂时不提。

6 CS

离散形式的柯西不等式是指：

定理 6.1. 设 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i=1, 2, \ldots, n$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2. \tag{6.1}$$

证明 作差配方得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2, \tag{6.2}$$

故定理 6.1 得证。 □

其他证法暂时懒得写。恒等式 (6.2) 被称作拉格朗日 (Lagrange) 恒等式。

值得一提的是，柯西不等式在国外通常称作 Cauchy-Schwarz 不等式（为了懒，本文称之为 CS），国内常把 Schwarz 省略了，我的建议是在与国外朋友交流时不要省。

推论 6.1.1. 设 $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$，则

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}. \tag{6.3}$$

此推论可以说是 CS 的最常用的变式，没有之一，正因为太过常用，习惯上甚至已经可以直接称它为 CS 而不必再提及“变式”等的字眼。

若仅论形式，CS 可以说是 Hölder、权方和等不等式的特殊形式，但注意 CS 的变量范围是实数，这是 Hölder 等所没有的。

7 小三元

前面讲的都是多元不等式，各种 $\sum$、$\prod$ 可能大家都看累了，故此最后我们再扯几个小小的三元不等式来舒缓一下情绪。

定理 7.1 (Schür 不等式)**.** 设 $r \in \mathbb{R}$, $a, b, c \geqslant 0$，则有

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-c)(b-a) + c^r(c-a)(c-b) \geqslant 0. \tag{7.1}$$

特别地，当 r 为正偶数时，式 (7.1) 对 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 成立。

证明 由对称性，不妨设 $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$，则式 (7.1) 等价于

$$a^r(a-b)^2 + (a^r - b^r + c^r)(a-b)(b-c) + c^r(b-c)^2 \geqslant 0,$$

显然无论 r 为何值，总有 $a^r - b^r + c^r \geqslant 0$，从而上式显然成立；

当 r 为正偶数时，易知当 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 且 $a \geqslant b \geqslant c$ 时也必有 $a^r - b^r + c^r \geqslant 0$，所以此时上式对 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 成立。

综上所述，定理 7.1 得证。 □

此证法其实也给出了证明类似 Schür 型不等式的一种简单方法。其他证法暂时懒得写。

特别地，当 $r = 1$ 时，式 (7.1) 有如下一些常用的等价形式

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqslant a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c; \tag{7.2}$$

$$abc \geqslant (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b); \tag{7.3}$$

$$abc \geqslant \frac{4(a+b+c)(ab+bc+ca) - (a+b+c)^3}{9}. \tag{7.4}$$

当 $r = 2$ 时，式 (7.1) 有如下等价形式

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geqslant a^3b + b^3a + b^3c + c^3b + c^3a + a^3c; \tag{7.5}$$

$$abc(a+b+c) \geqslant \frac{5(a+b+c)^2(ab+bc+ca) - 4(ab+bc+ca)^2 - (a+b+c)^4}{6}; \tag{7.6}$$

$$(a-b)^2(a+b-c)^2 + (b-c)^2(b+c-a)^2 + (c-a)^2(c+a-b)^2 \geqslant 0. \tag{7.7}$$

定理 7.2 (S.O.S. 方法)**.** 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}$，设 $S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2$，其中 S_a, S_b, S_c 是 a, b, c 的函数，若满足以下条件其中之一，则 $S \geqslant 0$。

（1）$S_a \geqslant 0 \wedge S_b \geqslant 0 \wedge S_c \geqslant 0$；

（2）$a \geqslant b \geqslant c \wedge S_b \geqslant 0 \wedge S_b + S_c \geqslant 0 \wedge S_b + S_a \geqslant 0$；

（3）$a \geqslant b \geqslant c \wedge S_a \geqslant 0 \wedge S_c \geqslant 0 \wedge S_a + 2S_b \geqslant 0 \wedge S_c + 2S_b \geqslant 0$；

（4）$a \geqslant b \geqslant c \wedge S_b \geqslant 0 \wedge S_c \geqslant 0 \wedge a^2S_b + b^2S_a \geqslant 0$；

（5）$a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0 \wedge S_a \geqslant 0 \wedge S_b \geqslant 0 \wedge c^2S_b + b^2S_c \geqslant 0$；
（6）$b + c \geqslant a \geqslant b \geqslant c \wedge S_a \geqslant 0 \wedge S_b \geqslant 0 \wedge b^2S_b + c^2S_c \geqslant 0$；
（7）$S_a + S_b + S_c \geqslant 0 \wedge S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a \geqslant 0$；
（8）……

证明 （1）这是显然的；

（2）因为 $(a-c)^2 - (a-b)^2 - (b-c)^2 = 2(a-b)(b-c) \geqslant 0$，所以 $(a-c)^2 \geqslant (a-b)^2 + (b-c)^2$，于是得

$$S \geqslant (S_b + S_c)(a-b)^2 + (S_b + S_a)(b-c)^2 \geqslant 0;$$

（3）因为 $2(a-b)^2 + 2(b-c)^2 - (a-c)^2 = (a+c-2b)^2 \geqslant 0$，所以 $(a-c)^2 \leqslant 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2$，于是得

$$S \geqslant (S_c + 2S_b)(a-b)^2 + (S_a + 2S_b)(b-c)^2 \geqslant 0;$$

（4）因为 $\dfrac{a-c}{b-c} \geqslant \dfrac{a}{b}$，所以

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 = (b-c)^2\left(S_a + \left(\frac{a-c}{b-c}\right)^2 S_b\right) \geqslant \frac{(b-c)^2}{b^2}(a^2S_b + b^2S_a),$$

于是

$$S \geqslant \frac{(b-c)^2}{b^2}(a^2S_b + b^2S_a) + S_c(a-b)^2 \geqslant 0;$$

（5）由 $c^2S_b + b^2S_c \geqslant 0$ 得 $S_c \geqslant -\dfrac{c^2}{b^2}S_b$，所以

$$S \geqslant S_b(c-a)^2 - \frac{c^2}{b^2}S_b(a-b)^2 = \frac{a(b-c)(ab+ac-2bc)}{b^2}S_b \geqslant 0;$$

（6）因为 $\dfrac{a-c}{a-b} \geqslant \dfrac{b}{c}$，所以

$$S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 = (a-b)^2\left(\left(\frac{a-c}{a-b}\right)^2 S_b + S_c\right) \geqslant \frac{(a-b)^2}{c^2}(b^2S_b + c^2S_c),$$

于是

$$S \geqslant S_a(b-c)^2 + \frac{(a-b)^2}{c^2}(b^2S_b + c^2S_c) \geqslant 0;$$

（7）若 $S_a + S_b, S_b + S_c, S_c + S_a$ 全为零，则必定 $S_a = S_b = S_c = 0$，此时 $S = 0$。若 $S_a + S_b, S_b + S_c, S_c + S_a$ 不全为零，则必有其中之一为正的，否则与 $S_a + S_b + S_c \geqslant 0$ 矛盾。不妨设 $S_b + S_c > 0$，配方得

$$S = \frac{\big((S_b + S_c)a - bS_c - cS_b\big)^2 + (S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a)(b-c)^2}{S_b + S_c} \geqslant 0.$$

综上所述，定理 7.2 得证。 □

你还可以继续找出更多类似的条件，然而，尽管有那么多判断条件，但是实战经验是，有一定难度的题，配出来的 S_a, S_b, S_c 经常都比较复杂，用上面各种条件都不容易判断正负，成功的概率并不高。

定理 7.3 (pqr 不等式)**.** 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$，记 $p = a+b+c, q = ab+bc+ca, r = abc$，则有

$$\frac{-2p^3 + 9pq - 2(p^2-3q)\sqrt{p^2-3q}}{27} \leqslant r \leqslant \frac{-2p^3 + 9pq + 2(p^2-3q)\sqrt{p^2-3q}}{27}. \tag{7.8}$$

证明 由 $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geqslant 0$ 展开得

$$-27r^2 + 2(9pq - 2p^3)r + p^2q^2 - 4q^3 \geqslant 0,$$

解此关于 r 的不等式即得式 (7.8)。 □

结束语

由于时间关系，本文有几个严重的缺陷：

- 无讨论取等条件
- 无设置相应例题
- 无配套相应习题
- 无列出参考文献

$\ddot\smile$ 真逗