

正多边形对角线的一个性质

常 建 明

(常熟高等专科学校)

摘 要 本文证明了正多边形对角线的一个并不为人所熟知的性质。该性质表明若 n 为正奇数且 $n \geq 5$, 则正 n 边形的任何三条不同的对角线不共点, 除非它们通过同一个顶点。由此我们即知正 n 边形当 n 为奇数时其对角线在其内部共有 $\binom{n}{4}$ 个不同的交点。

关键词 正 n 边形 奇数 对角线

1 引言 美国数学月刊^[1]曾经有一道征解题:

求凸 n 边形对角线在其内部的交点的个数, 然它的解答者在给出上述征解题解答后又提出了一个更困难的问题:

求 n 边简单的正多边形的对角线在其内部的互不相同的交点的个数。

在 n 为奇数的情形, 我们证得了正 n 边形的一个性质, 从而解决了上述问题。

定理 1 若 n 为奇数且 $n \geq 5$, 则正 n 边形无三条对角形共点, 除非它们通过同一顶点。

定理 2 假设同定理 1, 则正 n 边形的对角线在其内部共有 $\binom{n}{4}$ 个互不相同的交点。

2 主要引理 为证明我们的结果, 我们需要下述诸引理。

$$\begin{aligned} \text{引理 1} \quad & \begin{vmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta & \cos k\theta \\ \cos(s+j)\theta & \sin(s+j)\theta & \cos(s-j)\theta \\ \cos(l+m)\theta & \sin(l+m)\theta & \cos(l-m)\theta \end{vmatrix} \\ & = 2 [\sin m\theta \sin l\theta \sin(s+j-k)\theta - \sin s\theta \sin j\theta \sin(l+m-k)\theta] \end{aligned}$$

此引理的证明是简单的。兹略。

引理 2 $\sin rx = \cos^r x \cdot \operatorname{tg} x \cdot P_r(-\operatorname{tg}^2 x)$, 其中 r 为自然数, 且

$$P_r(x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \binom{r}{2i+1} x^i$$

文稿收到日期: 91-09-27

为一整系数多项式, 此处 $[u]$ 表示不超过 u 的最大整数。

引理2是 de Moivre 定理的推论。证略。

#

引理3

$$4\sin x \sin y \sin z = \sin(-x+y+z) + \sin(x-y+z) + \sin(x+y-z) - \sin(x+y+z)$$

$$4\cos x \cos y \cos z = \cos(-x+y+z) + \cos(x-y+z) + \cos(x+y-z) + \cos(x+y+z)$$

引理3只要利用三角函数的积化和差公式就可证明。

引理4^[2] $2 \cos \frac{2\pi}{n}$ ($n \geq 3$) 是一个 $\frac{1}{2} \varphi(n)$ 次代数数, 其共轭数为

$$2 \cos \frac{2p\pi}{n}, \quad (p, n) = 1.$$

引理5 $-\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}$ ($n \geq 3$) 是一个 $\frac{1}{2} \varphi(n)$ 次代数数, 其共轭数为 $-\operatorname{tg}^2 \frac{p\pi}{n}$, $(p, n) = 1$ 。

证明: 由于 $-\operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1}$, 故引理5是引理4的直接推论。

#

引理6^[3] 若两有理系数多项式 $f(x)$, $g(x)$ 有公共根, 且 $g(x)$ 在有理数域上不可约, 则 $g(x)$ 的所有根均为 $f(x)$ 的根。

引理7 模均为1的复数 $x_1, \dots, x_6$ 若满足

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \\ x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = x_4^4 + x_5^4 + x_6^4 \\ x_1^8 + x_2^8 + x_3^8 = x_4^8 + x_5^8 + x_6^8 \end{cases}$$

则或者集合 $\{x_1^2, x_2^2, x_3^2\} = \{x_4^2, x_5^2, x_6^2\}$, 或者有实数 α, β 使 $\{x_1, x_2,$

$$x_3\} = e^{i\alpha} \{1, e^{i\frac{2}{3}\pi}, e^{i\frac{4}{3}\pi}\} \text{ 和 } \{x_4, x_5, x_6\} = e^{i\beta} \{1, e^{i\frac{2}{3}\pi},$$

$$e^{i\frac{4}{3}\pi}\}, \text{ 此处 } \lambda S \text{ 表示 } \{\lambda x \mid x \in S\}.$$

[证明]

$$\because (x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 2(xy+yz+zx)$$

$$\therefore x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = x_4x_5 + x_5x_6 + x_6x_1$$

$$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 = x_4^2x_5^2 + x_5^2x_6^2 + x_6^2x_4^2$$

$$x_1^4x_2^4 + x_2^4x_3^4 + x_3^4x_1^4 = x_4^4x_5^4 + x_5^4x_6^4 + x_6^4x_4^4$$

$$\therefore x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3) = x_4x_5x_6(x_4+x_5+x_6)$$

$$x_1^2x_2^2x_3^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2) = x_4^2x_5^2x_6^2(x_4^2+x_5^2+x_6^2)$$

下分三种情形讨论:

Case a) $x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 \neq 0$ 则有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = x_4x_5 + x_5x_6 + x_6x_4 \\ x_1x_2x_3 = x_4x_5x_6 \end{cases}$$

故 x_1, x_2, x_3 与 x_4, x_5, x_6 为同一个三次方程的根, 从而

$$\{x_1, x_2, x_3\} = \{x_4, x_5, x_6\};$$

Case b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \neq 0$, 此时同 a) 一样可证 $x_1^2, x_2^2,$

x_3^2 与 x_4^2, x_5^2, x_6^2 为同一个三次方程的三个根, 故

$$\{x_1^2, x_2^2, x_3^2\} = \{x_4^2, x_5^2, x_6^2\};$$

Case c) $x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 = 0, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0$

则此时有

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = x_4x_5 + x_5x_6 + x_6x_4 = 0$$

又因 $|x_1x_2x_3| = |x_4x_5x_6| = 1$, 故存在实数 α, β 使 x_1, x_2, x_3 与 x_4, x_5, x_6 分别是方程 $x^3 - e^{3i\alpha} = 0$ 和 $x^3 - e^{3i\beta} = 0$ 的三根, 于是引理 7 证明完毕. #

3 定理 1 的证明, 根据上述诸引理, 我们就可着手来证明定理 1。

显然可不妨假设正 n 边形内接于一单位圆, 且设其顶点为 $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ (以逆时针方向排列), 现以正 n 边形中心 O 为原点, $\overrightarrow{OA_0}$ 方向为 x 轴正向建立右手直角坐标系. 令 $\theta = \frac{\pi}{n}$. 则 A_s 的坐标为 $(\cos s\theta, \sin s\theta)$, $0 \leq s \leq n-1$, 从而对角线 $A_l A_m$ 的方程为

$$x \cos(s+j)\theta + y \sin(s+j)\theta - \cos(s-j)\theta = 0.$$

现假设定理不成立, 则由正多边形的旋转对称性可知存在三对角线 $A_l A_m, A_s A_k, A_l A_m$ 共点, 其中足标 $0, k, s, j, l, m$ 互不相同, 故有

$$\begin{vmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta & \cos k\theta \\ \cos(s+j)\theta & \sin(s+j)\theta & \cos(s-j)\theta \\ \cos(l+m)\theta & \sin(l+m)\theta & \cos(l-m)\theta \end{vmatrix}$$

由引理 1 知

$$\sin s\theta \sin j\theta \sin(l+m-k)\theta - \sin l\theta \sin m\theta \sin(s+j-k)\theta = 0.$$

显然 $\sin s\theta, \sin j\theta, \sin l\theta, \sin m\theta$ 均不等于零, 进一步有 $\sin(l+m-k)\theta \neq 0, \sin(s+j-k)\theta \neq 0$, 否则将有 $\sin(l+m-k)\theta = \sin(s+j-k)\theta = 0$, 从而 $A_l A_m, A_s A_k, A_l A_m$ 平行与假设矛盾。

另一方面, 由于 $\cos \theta \neq 0, \operatorname{tg} \theta \neq 0$, 故由引理 2 知 $-\operatorname{tg}^2 \theta$ 为整系数多项式

$$\varepsilon_{l+m-k} p_s(x) p_j(x) p_{l+m-k}(x) - \varepsilon_{s+j-k} p_l(x) p_m(x) p_{s+j-k}(x)$$

的根, 其中 $\varepsilon_x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ 然由引理 5, $-\operatorname{tg}^2 \theta$ 的共轭数为 $-\operatorname{tg}^2 p \theta$, $(p, n) = 1$, 从而应用引理 6 可得

$$\sin p s \theta \sin p j \theta \sin p(l+m-k) \theta = \sin p l \theta \sin p m \theta \sin p(s+j-k) \theta$$

其中 $(p, n) = 1$, 显然上式两边的每一项均非零, 由于 n 为奇数, 故可取 $p = 1, 2, 4, 8, 16$ 。从而利用 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ 这一简单事实可知

$$\begin{cases} \sin p s \theta \sin p j \theta \sin p(l+m-k) \theta = \sin p l \theta \sin p m \theta \sin p(s+j-k) \theta \\ \cos p s \theta \cos p j \theta \cos p(l+m-k) \theta = \cos p l \theta \cos p m \theta \cos p(s+j-k) \theta \end{cases}$$

$p = 1, 2, 4, 8$ 。

利用引理 3, 并令

$$a_1 = -s + j + l + m - k, \quad a_2 = s - j + l + m - k, \quad a_3 = s + j - l - m + k$$

$$a_4 = -l + m + s + j - k, \quad a_5 = l - m + s + j - k, \quad a_6 = l + m - s - j + k$$

则我们有

$$e^{i p a_1 \theta} + e^{i p a_2 \theta} + e^{i p a_3 \theta} = e^{i p a_4 \theta} + e^{i p a_5 \theta} + e^{i p a_6 \theta}, \quad p = 1, 2, 4, 8.$$

如是, 由引理 7, 有以下两种情形

$$\text{Case } 1^\circ) \{ e^{2i a_1 \theta}, e^{2i a_2 \theta}, e^{2i a_3 \theta} \} = \{ e^{2i a_4 \theta}, e^{2i a_5 \theta}, e^{2i a_6 \theta} \}.$$

不妨设 $e^{2i a_1 \theta} = e^{2i a_4 \theta}$, 则 $e^{2i(a_1 - a_4)\theta} = 1$ 。故 $a_1 - a_4 \equiv 0 \pmod{n}$, 但 $a_1 - a_4 = 2(-s + l)$ 。因 $(2, n) = 1$, 从而 $-s + l \equiv 0 \pmod{n}$ 即 $s = l$, 与假设矛盾。

Case $2^\circ)$ 有实数 α, β 使

$$\{ e^{i a_1 \theta}, e^{i a_2 \theta}, e^{i a_3 \theta} \} = e^{i \alpha} \{ 1, e^{i \frac{2}{3} \pi}, e^{i \frac{4}{3} \pi} \}$$

$$\{ e^{i a_4 \theta}, e^{i a_5 \theta}, e^{i a_6 \theta} \} = e^{i \beta} \{ 1, e^{i \frac{2}{3} \pi}, e^{i \frac{4}{3} \pi} \}.$$

此时不妨设 $e^{i(a_2 - a_1)\theta} = e^{i \frac{2}{3} \pi}, e^{i(a_3 - a_1)\theta} = e^{i \frac{4}{3} \pi}$

$$e^{i(a_5 - a_4)\theta} = e^{i \frac{2}{3} \pi}, e^{i(a_6 - a_4)\theta} = e^{i \frac{4}{3} \pi}.$$

故 $\frac{s-j}{n} - \frac{1}{3}, \frac{l-m}{n} - \frac{1}{3}, \frac{s-l-m+k}{n} - \frac{2}{3}, \frac{l-s-j+k}{n} - \frac{2}{3}$ 均为整数, 不妨设

$s < j, l < m$, 则易见

$$\frac{j-s}{n} = \frac{m-l}{n} = \frac{2}{3} \quad \text{即 } j = s + \frac{2}{3}n, \quad m = l + \frac{2}{3}n.$$

故 $0 < s, l < \frac{1}{3}n$ 从而 $0 < |s-l| < \frac{1}{3}n$ 或 $0 < \left| \frac{3(s-l)}{n} \right| < 1$ 。

但由 $\frac{s-l-m+k}{n} - \frac{l-s-j+k}{n} = \frac{3(s-l)}{n}$ 知 $\frac{3(s-l)}{n}$ 为整数。这便得矛盾, 至此, 我们完成了定理 1 的证明。

(下转第45页)

(24) 式说明小球势能大部分在与档板的碰撞中被形变所消耗。

所以, 人体下蹲后最大摆角不是增大, 而是减小的, 即起立增加的势能大部分在下蹲的最后时刻被腿部肌肉的变形所消耗。

如果人体起立后最大摆角的增大大于下蹲后最大摆角的减小, 那么秋千就在人体一起一蹲中越荡越高了。

参 考 文 献

理论力学教程, 人民教育出版社, 1979

(上接第33页)

4 定理2的证明, 由定理1可知, 正 n 边形对角线在其内部的交点个数与由正 n 边形顶点可构成的凸四边形数目相等, 故所求个数即为 $\binom{n}{4}$ 。

5 一个注记

在 n 为偶数时, 正 n 边形的对角线即使非主对角线(即过中心)也有三条甚至四条共点, 例子是很容易举的。现在的问题是如何定出正 n 边形在 n 为偶数时其若干条对角线共点的充要条件, 这值得进一步探讨。最后我们提出下述猜测以结束本文。

猜测: 若 n 为偶数, $n \geq 6$, 则正 n 边形无五条相异对角线共点, 除非它们或者通过同一顶点, 或者均为主对角线。

参 考 文 献

- 1 陈湘能等译, 《国际最佳数学征解问题分析》, 湖南科技出版社, 1983; 48, 363
- 2 G. 波利亚, G. 舍贵著, 《数学分析中的问题和定理》, 上海科技出版社, 1985; (2): 186
- 3 华罗庚, 《数论导引》, 科学出版社, 1975; 68~69