

正奇数边形任何三条对角线形内不共点

周永良

(孝感市 4404 厂子弟学校, 湖北 432100)

中图分类号: O123

文献标识码: A

文章编号: 0488-7395(2001)11-0031-01

文[1]中作者证明了: 当 n 为素数时, 正 n 边形的任何三条或三条以上对角线在形内不共点. 本文证明当 n 为奇数时, 这一结论仍然成立. 从而完全解决了猜想 whc57. 本文沿用文[1]记号.

定理 正奇数边形任何三条对角线形内不共点.

证 用反证法, 设 n 为奇数, 正整数 $n_1, n_2, \dots, n_6$ 满足 $n_1 + n_2 + \dots + n_6 = n$, 且

$$\omega^{n_1+n_3+n_5}(\omega^{n_2}-1)(\omega^{n_4}-1)(\omega^{n_6}-1) + (\omega^{n_1}-1)(\omega^{n_3}-1)(\omega^{n_5}-1) = 0 \tag{1}$$

记 $f(x) = x^{n_1+n_3+n_5}(x^{n_2}-1)(x^{n_4}-1)(x^{n_6}-1) + (x^{n_1}-1)(x^{n_3}-1)(x^{n_5}-1)$, 因 $f(\omega) = 0$, 故 $\Phi_n(x) | f(x)$, 因为 n 是奇数, $(2, n) = 1$, ω^2 是 n 次本元单位根, 所以 ω^2 是 $\Phi_n(x)$ 的根, 进而 $f(x)$ 的根, 即有

$$\omega^{2(n_1+n_3+n_5)}(\omega^{2n_2}-1)(\omega^{2n_4}-1)(\omega^{2n_6}-1) + (\omega^{2n_1}-1)(\omega^{2n_3}-1)(\omega^{2n_5}-1) = 0 \tag{2}$$

由(1)式, (2)式左端第一项等于

$$\omega^{2(n_1+n_3+n_5)}(\omega^{n_2}+1)(\omega^{n_4}+1)(\omega^{n_6}+1)(\omega^{n_2}-1)(\omega^{n_4}-1)(\omega^{n_6}-1) = -\omega^{n_1+n_3+n_5}(\omega^{n_2}+1)(\omega^{n_4}+1)(\omega^{n_6}+1)(\omega^{n_1}-1)(\omega^{n_3}-1)(\omega^{n_5}-1).$$

(2) 式中约去非零因式 $(\omega^{n_1}-1)(\omega^{n_3}-1)(\omega^{n_5}-1)$, 得

$$\omega^{n_1+n_3+n_5}(\omega^{n_2}+1)(\omega^{n_4}+1)(\omega^{n_6}+1) = (\omega^{n_1}+1)(\omega^{n_3}+1)(\omega^{n_5}+1) \tag{3}$$

又(1)式可写作

$$\omega^{n_1+n_3+n_5}(\omega^{n_2}-1)(\omega^{n_4}-1)(\omega^{n_6}-1) = -(\omega^{n_1}-1)(\omega^{n_3}-1)(\omega^{n_5}-1) \tag{4}$$

(3), (4)两式相加, 除以 2, 得

$$\omega^{n_1+n_3+n_5}(\omega^{n_2} + \omega^{n_4} + \omega^{n_6} + \omega^{n_2} + \omega^{n_4} + \omega^{n_6}) = \omega^{n_3+n_5} + \omega^{n_5+n_1} + \omega^{n_1+n_3} + 1.$$

$$\omega^{n_1+n_3+n_5}(\omega^{n_2} + \omega^{n_4} + \omega^{n_6}) = \omega^{n_3+n_5} + \omega^{n_5+n_1} + \omega^{n_1+n_3}.$$

$$\omega^{n_2} + \omega^{n_4} + \omega^{n_6} = \omega^{-n_1} + \omega^{-n_3} + \omega^{-n_5} \tag{5}$$

(3), (4)两式相减, 除以 2, 得

$$\omega^{n_1+n_3+n_5}(\omega^{n_4} + \omega^{n_6} + \omega^{n_2} + \omega^{n_2} + \omega^{n_4} + 1) = \omega^{n_1+n_3+n_5} + \omega^{n_1} + \omega^{n_3} + \omega^{n_5}.$$

$$\omega^{n_1+n_3+n_5}(\omega^{n_4} + \omega^{n_6} + \omega^{n_2} + \omega^{n_2} + \omega^{n_4}) = \omega^{n_1} + \omega^{n_3} + \omega^{n_5}.$$

$$\omega^{n_4} + \omega^{n_6} + \omega^{n_2} + \omega^{n_2} + \omega^{n_4} = \omega^{-n_3} + \omega^{-n_5} + \omega^{-n_1} + \omega^{-n_1} + \omega^{-n_3} \tag{6}$$

同时, 由 $\omega^n = 1$, 又有

$$\omega^{n_2} + \omega^{n_4} + \omega^{n_6} = \omega^{-n_1} + \omega^{-n_3} + \omega^{-n_5} \tag{7}$$

由(5), (6), (7)三式可知 $\omega^{n_2}, \omega^{n_4}, \omega^{n_6}$ 和 $\omega^{-n_1}, \omega^{-n_3}, \omega^{-n_5}$ 是同一个三次方程的三个根. 但是显然 $\omega^{n_2}, \omega^{n_4}, \omega^{n_6}$ 中任何一个与 $\omega^{-n_1} = \omega^{n-n_1}, \omega^{-n_3} = \omega^{n-n_3}, \omega^{-n_5} = \omega^{n-n_5}$ 中任何一个都不可能相等. 因此, 不可能有正整数 $n_1, n_2, \dots, n_6$ 满足(1)式. 由文[1]引理 2 知定理成立.

由此定理, 我们就可以知道, n 为奇数时, 正 n 边形的对角线交点为

$$D(n) = C_n^4 = \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3).$$

杨之先生著作[2]中的上一个问题是我国著名图论专家张忠辅教授在 1986 年提出的一个问题.

whc56 正 n 边形对角线在形内的交点有多少个? 是否存在一个简单的计数公式?

为了考虑 n 为偶数的情况, 作者提出以下猜想, 若能获证, 则可望解决正 $6k \pm 2$ 边形对角线交点的计数问题.

猜想 若 $2 | n, 3$ 不能整除 n , 则除了四条或四条以上主对角线共点于中心外, 正 n 边形的任何四条或四条以上对角线在形内不共点.

参考文献:

[1] 周永良. 正素数边形任何三条对角线形内不共点. 数学通讯, 2001(3).
[2] 杨之. 初等数学研究的问题与课题. 湖南: 湖南教育出版社, 1993 年 5 月第一版.

收稿日期: 2001-03-27

(作者简介) 周永良 (1944-) 男, 上海市人, 湖北孝感市 4404 厂子弟学校高级教师. rights reserved. <http://www>