中学数学教学参考
2003 年第 4 期

正素数、正奇数边形任何三条对角线形内不共点

——whc57 的完全解决

湖北孝感市第 40 号信箱学校 周永良

whc57 是杨之先生 1986 年提出的一个猜想：当 n 为奇数时，正 n 边形任何三条对角线在形内不共点[1]，杨之先生对这一猜想的解决相当关注．2000 年第四届初数会上，他作了一个大会报告，在“回顾若干 whc 的研究”一节中，回顾了 whc57 两次失败的证明，说明这一猜想虽简明易懂，但解决相当困难，他感叹 15 年来竟无人能“动它一根毫毛”，估计离解决尚远，笔者以为，此猜想研究的任何进展，应该是令人鼓舞的．

引理 1[1]　在圆内接凸六边形 $A_1\cdots A_6$ 中，三条对角线 A_1A_4，A_2A_5，A_3A_6 共点的充要条件是

$$A_1A_2\cdot A_3A_4\cdot A_5A_6=A_2A_3\cdot A_4A_5\cdot A_6A_1. \quad ①$$

设正 n 边形顶点 Z_k 对应复数 $z_k=e^{\frac{2k\pi i}{n}}=w^k$，$w=e^{\frac{2\pi i}{n}}$．设 $0\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_6<n$，$n_1=k_2-k_1$，$n_2=k_3-k_2$，…，$n_5=k_6-k_5$，$n_6=n+k_1-k_6$，$n_1,\cdots,n_6\in\mathbf{N}$，显然，$n_1+\cdots+n_6=n$．

引理 2　$Z_{k_1}Z_{k_4}$，$Z_{k_2}Z_{k_5}$，$Z_{k_3}Z_{k_6}$三线共点的充要条件是下列之一：

$$f_1(w)=(w^{k_2}-w^{k_1})(w^{k_4}-w^{k_3})(w^{k_6}-w^{k_5})+(w^{k_3}-w^{k_2})(w^{k_5}-w^{k_4})(w^{k_1}-w^{k_6})=0. \quad ②$$

$$f_2(w)=w^{n_1+n_3+n_5}(w^{n_2}-1)(w^{n_4}-1)\cdot(w^{n_6}-1)+(w^{n_1}-1)(w^{n_3}-1)(w^{n_5}-1)=0. \quad ③$$

其中 n_1、n_3、n_5 可与 n_2、n_4、n_6 互换．

$$f_3(w)=w^{n_1+n_3+n_5}(w^{n_2+n_4}+w^{n_4+n_6}+w^{n_6+n_2}-w^{n_2}-w^{n_4}-w^{n_6})+(w^{n_1+n_3}+w^{n_3+n_5}+w^{n_5+n_1}-w^{n_1}-w^{n_3}-w^{n_5})=0. \quad ④$$

其中 n_1、n_3、n_5 与 n_2、n_4、n_6 可互换．

$$f_4(w)=(w^{n_1+n_3+n_5}-1)(w^{n_2}-1)(w^{n_4}-1)(w^{n_6}-1)-(w^{n_2+n_4+n_6}-1)(w^{n_1}-1)(w^{n_3}-1)(w^{n_5-1})=0. \quad ⑤$$

证明：$0\leqslant\theta_2-\theta_1\leqslant 2\pi$ 时，记 $\alpha=\frac{\theta_2-\theta_1}{2}$，$\beta=\frac{\pi+\theta_2+\theta_1}{2}$，则

$$e^{i\theta_2}-e^{i\theta_1}=2\sin\alpha(\cos\beta+i\sin\beta)$$
$$=|e^{i\theta_2}-e^{i\theta_1}|e^{\beta i}(\because \sin\alpha\geqslant 0,$$

故 $\sin\alpha=|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|$)．

记 $\theta_{uv}=\frac{\pi}{2}+\frac{k_v\pi}{n}+\frac{k_u\pi}{n}$，则有

$$w^{k_u}-w^{k_v}=Z_{ku}Z_{kv}e^{i\theta_{uv}}.$$

$$\therefore (w^{k_2}-w^{k_1})(w^{k_4}-w^{k_3})(w^{k_6}-w^{k_5})$$
$$=Z_{k_2}Z_{k_1}\cdot Z_{k_4}Z_{k_3}\cdot Z_{k_6}Z_{k_5}\cdot e^{(\theta_{12}+\theta_{34}+\theta_{56})i}$$
$$-(w^{k_3}-w^{k_2})(w^{k_5}-w^{k_4})(w^{k_1}-w^{k_6})$$
$$=Z_{k_3}Z_{k_2}\cdot Z_{k_5}Z_{k_4}\cdot Z_{k_1}Z_{k_6}\cdot e^{(\theta_{12}+\theta_{34}+\theta_{56})i}.$$

由引理 1 即知，$Z_{k_1}Z_{k_4}$，$Z_{k_2}Z_{k_5}$，$Z_{k_3}Z_{k_6}$共点的条件是②成立．

$$f_1(w)\cdot w^{k_2-k_4-k_6}\cdot w^{n_1+n_3+n_5}=f_2(w).$$

现②与③等价；③展开，注意 $n_1+\cdots+n_6=n$，$w^n=1$，即为 $f_3(w)$，故③、④等价；$f_2(w)$ 中 n_1、n_3、n_5 与 n_2、n_4、n_6 互换得 $f_2'(w)$，$f_2'(w)-f_2(w)=f_4(w)$．反之，若⑤成立，两端乘以 $w^{n_1+n_3+n_5}$，注意 $w^{n_1+n_3+n_5}-1\neq 0$，即为③．

引理 3　$Z_{k_1}Z_{k_4}$，$Z_{k_2}Z_{k_5}$，$Z_{k_3}Z_{k_6}$三线共点的充要条件是下列条件之一：

$$\varphi_n(x)\mid f_i(x),\ i=1,2,3 \text{ 或 } 4. \quad ⑥$$

其中 $\varphi_n(x)$是分圆多项式[1]，$f_i(x)$是将②～⑤中 $f_i(w)$中的 w 换为 x 而得到的多项式．

证明：若②成立，则 $f_1(x)$有根 $x=w$；但

$\varphi_n(x)$也有根 w，而 $\varphi_n(x)$为不可约多项式，所以 $\varphi_n(x)|f(x)$(见[2]第四章§2 的定理二)．反之，若 $\varphi_n(x)|f_1(x)$，显然有②成立．因而三线共点的条件是⑥中 $i=1$ 时成立．类似证 $i=2,3,4$ 的情形．

定理 1　素数条边的正多边形任何三条对角线在形内不共点．

证明：设素数 $n\geqslant 7$，我们来证明，对任何其和为 n 的正整数组$(n_1,\cdots,n_6)$，$\varphi_n(x)|f_2(x)$不会成立．因为 $f_2(x)$可分解为 $f_2(x)=(x-1)^3g(x)$，其中 $g(x)$是$(n-3)$次非零多项式；n 是素数，$\varphi_n(x)=x^{n-1}+\cdots+1$ 是$\varphi(n)=n-1$ 次多项式，$\varphi_n(x)\nmid(x-1)^3$，$\varphi_n(x)\nmid g(x)$，故 $\varphi_n(x)\nmid f_2(x)$．

定理 2　奇数条边的正多边形任何三条对角线在形内不共点．

证明：用反证法，设 n 为奇数，正整数 $n_1,\cdots,n_6$ 满足 $n_1+\cdots+n_6=n$，使相应三条对应线共点，则

$$f_2(w)=0. \qquad ①$$

即 $f_2(x)$有根 w，从而 $\varphi_n(x)|f_2(x)$，因 n 为奇数，$(2,n)=1$，w^2 为 n 次本原单位根，故 w^2 是 $\varphi_n(x)$的根，进而是 $f_2(x)$的根，即

$$f_2(w^2)=0 \qquad ②$$

由①将 $f_2(w^2)$析因，第 1 项为

$$w^{2(n_1+n_3+n_5)}(w^{n_2}+1)(w^{n_4}+1)(w^{n_6}+1)\cdot(w^{n_2}-1)(w^{n_4}-1)(w^{n_6}-1)$$
$$=-w^{n_1+n_3+n_5}(w^{n_2}+1)(w^{n_4}+1)(w^{n_6}+1)(w^{n_1}-1)(w^{n_3}-1)(w^{n_5}-1).$$

因而，$f_2(w^2)$前后两项有非零公因式

$$(w^{n_1}-1)(w^{n_3}-1)(w^{n_5}-1),$$

②中约去这个因式，得

$$w^{n_1+n_3+n_5}(w^{n_2}+1)(w^{n_4}+1)(w^{n_6}+1)=(w^{n_1}+1)(w^{n_3}+1)(w^{n_5}+1). \qquad ③$$

又①可写作

$$w^{n_1+n_3+n_5}(w^{n_2}-1)(w^{n_4}-1)(w^{n_6}-1)=-(w^{n_1}-1)(w^{n_3}-1)(w^{n_5}-1). \qquad ④$$

③、④两式相加，除以 2，

$$w^{n_1+n_3+n_5}(w^{n_2+n_4+n_6}+w^{n_2}+w^{n_4}+w^{n_6})=w^{n_3+n_5}+w^{n_5+n_1}+w^{n_1+n_3}+1,$$

$$w^{n_1+n_3+n_5}(w^{n_2}+w^{n_4}+w^{n_6})=w^{n_3+n_5}+w^{n_5+n_1}+w^{n_1+n_3},$$

$$w^{n_2}+w^{n_4}+w^{n_6}=w^{-n_1}+w^{-n_3}+w^{-n_5}. \qquad ⑤$$

③、④两式相减，除以 2，

$$w^{n_1+n_3+n_5}(w^{n_4+n_6}+w^{n_6+n_2}+w^{n_2+n_4}+1)=w^{n_1+n_3+n_5}+w^{n_1}+w^{n_3}+w^{n_5},$$

$$w^{n_1+n_3+n_5}(w^{n_4+n_6}+w^{n_6+n_2}+w^{n_2+n_4})=w^{n_1}+w^{n_3}+w^{n_5},$$

$$w^{n_4+n_6}+w^{n_6+n_2}+w^{n_2+n_4}=w^{-n_3-n_5}+w^{-n_5-n_1}+w^{-n_1-n_3}. \qquad ⑥$$

同时，由 $w^n=1$，又有

$$w^{n_2+n_4+n_6}=w^{-n_1-n_3-n_5}. \qquad ⑦$$

⑤、⑥、⑦表明，w^{n_2}，w^{n_4}，w^{n_6} 和 w^{-n_1}，w^{-n_3}，w^{-n_5} 是同一个三次方程的三个根，但是，w^{n_2}，w^{n_4}，w^{n_6}中任何一个与 $w^{-n_1}=w^{n-n_1}$，$w^{-n_3}=w^{n-n_3}$，$w^{-n_5}=w^{n-n_5}$中任何一个，都不可能相等，因此，不可能有正整数 $n_1,n_2,\cdots,n_6$ 满足①，由[1]的引理 2，知定理得证．

由此即知，当 n 为奇数时，正 n 边形交点数为

$$D(n)=C_n^4=\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

对于偶数情况，作者猜想：若 $2|n$，3 不能整除 n(即 $n=6k\pm2$)，则除了主对角线汇于中心外，正 n 边形任何四条或四条以上的对角线在形内不共点．

参考文献

1　杨之．初等数学研究的问题与课题．长沙：湖南教育出版社，1993．
2　华罗庚．数论导引．北京：科学出版社，1957．

(注：本文由中国初等数学研究工作协调组杨世明老师摘编．杨老师地址：天津市宝坻区华苑 1－2－102(301800)电话：022－82686221．)