等差数列方幂的和及其推广

上海市复旦大学附属中学　汪杰良　(邮编:200433)

本文介绍一种利用计算数学中的差分概念推导出求$\sum_{p=1}^{n} p^m$的和的一种新方法。利用这种方法,可以摆脱对$\sum_{p=1}^{n} p^{m-i}(i=1,2,\cdots,m)$的依赖,得出求$\sum_{p=1}^{n} p^m$的和的一般模式,容易记忆;当 m 较大时,能大大减小运算量,便于计算机计算;能得到求$\sum_{p=1}^{n} p^m$的和的一般结果。然后,把问题推广为求$\sum_{p=1}^{n}(a+bp)^m$(a、b 为常数,m 和 n 为正整数)的和以及求$\sum_{p=1}^{n}[(a+bp)^k]^m$($a$、$b$ 为常数,m 和 k 为非零整数,且 m、k 同号,n 为正整数)的和。进而用本文推导出的主要结果解决有限项交错级数$\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}(a+bp)^m$以及求$\sum_{p=l}^{n}(a+bp)^m$($a$、$b$ 为常数,l 为整数,m 和 n 为正整数)的和的问题。

定义 1　设已知函数 $f(x)$在一串等距点 $x_j=x_0+jh(j=0,1,2,\cdots)$上的值为 $f(x_0)$, $f(x_0+h)$, $f(x_0+2h)$, $\cdots$。我们称表达式 $\Delta f(x_0+jh)=f[x_0+(j+1)h]-f(x_0+jh)$为 $f(x)$在点 $x=x_j$ 上以 h 为步长的一阶向前差分,简称一阶差分。其中"Δ"称作向前差分算子。

约定 $\Delta^0 f(x_0+jh)=f(x_0+jh)$。

对一阶差分再作一次差分称作二阶差分。记作 $\Delta^2 f(x_0+jh)=\Delta f[x_0+(j+1)h]-\Delta f(x_0+jh)$。

一般地,n 阶差分可如下定义

定义 2　对 $n-1$ 阶差分的差分称作 n 阶差分,记作 $\Delta^n f(x_0+jh)=\Delta^{n-1}f[x_0+(j+1)h]-\Delta^{n-1}f(x_0+jh)$。

由差分的定义容易证明:

引理 1　常数的差分为零。

引理 2　若 m、n 为正整数,则 $\Delta^m\Delta^n f(x_0+jh)=\Delta^{m+n}f(x_0+jh)$。

由数学归纳法易证。

引理 3　n 次多项式 $f(x)$的 m 阶差分 $\Delta^m f(x)$ $(0\leqslant m\leqslant n)$是 $n-m$ 次多项式。

由引理 3 及引理 1,立得:

推论　若 u 为正整数,n 次多项式 $f(x)$的 $n+u$ 阶差分恒为零。

引理 4　任一多项式 $f(x)$,若 $\Delta^m f(x)$是 s 次项式,则 $f(x)$是 $s+m$ 次多项式。

证明　用反证法。若 $f(x)$不是 $s+m$ 次多项式,不妨设 $f(x)$是 k 次多项式,$k\neq s+m$,由引理 3,对 $f(x)$作 m 阶差分得 $\Delta^m f(x)$是 $k-m$ 次多项式。由于 $k\neq s+m$,于是 $k-m\neq s$,故 $\Delta^m f(x)$不是 s 次多项式,与已知矛盾,所以 $f(x)$是 $s+m$ 次多项式。

定理 1　设 m 和 n 为正整数,则和数$\sum_{p=1}^{n} p^m$ $=S'(0)n+S''(0)\cdot\frac{n^2}{2!}+\cdots+S^{(m+1)}(0)\frac{n^{m+1}}{(m+1)!}$,式中 $S^{(m+1)}(0)=A_m^m$。$S^{(m-i)}(0)=A_m^{m-i-1}-[\frac{1}{2!}S^{(m-i+1)}(0)+\frac{1}{3!}S^{(m-i-2)}(0)+\cdots+\frac{1}{(i+2)!}S^{(m+1)}(0)]$,这里 $i=0,1,2,\cdots,m-1$。

证明　和数$\sum_{p=1}^{n} p^m$是 n 的函数,设 $S(0)=0$, $S(n)=\sum_{p=1}^{n} p^m$, $n=1,2,\cdots$。根据定义 1　$\Delta S(n)=S(n+1)-S(n)=(n+1)^m$,由于 $S(n)$的一阶差分是 m 次多项式,根据引理 4, $S(n)$可用变元 n 的 $m+1$ 次多项式表示。把 $S(n)$利用 Taylor 级数展开

$$S(n)=S'(0)\cdot n+S''(0)\cdot\frac{n^2}{2!}+\cdots+S^{(m+1)}(0)\cdot\frac{n^{m+1}}{(m+1)!}$$

。把 $\Delta S(n)$展成 Taylor 级数

$$S'(n)+\frac{S''(n)}{2!}+\frac{S'''(n)}{3!}+\cdots+\frac{S^{m+1}(n)}{(m+1)!}=(n+1)^m。$$

对上式求各阶导数,陆续可得

$$S''(n)+\frac{S'''(n)}{2!}+\cdots+\frac{S^{(m+1)}(n)}{m!}=A_m^1(n+1)^{m-1}$$

$$S'''(n)+\cdots+\frac{S^{(m+1)}(n)}{(m-1)!}=A_m^2(n+1)^{m-2},\cdots,$$

$$S^{(m+1)}(n)=A_m^m。$$

当 $n=0$ 时,由以上 $m+1$ 式确定 $S'(0)$, $S''(0)$, $\cdots$, $S^{(m+1)}(0)$的线性方程组:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(m+1)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{m!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{(m-1)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S'(0) \\ S''(0) \\ S'''(0) \\ \vdots \\ S^{(m+1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ A_m^1 \\ A_m^2 \\ \vdots \\ A_m^m \end{bmatrix}$$

由于此方程组的系数矩阵为上三角矩阵，自下而上进行逐个迭代可以求得方程组的解为 $S^{(m+1)}(0)=A_m^m$，$S^{(m-i)}(0)=A_m^{m-i-1}-[\frac{1}{2!}S^{(m-i+1)}(0)+\frac{1}{3!}S^{(m-i+2)}(0)+\cdots+\frac{1}{(i+2)!}S^{(m+1)}(0)]$ $(i=0,1,2,\cdots,m-1)$，把这个结果代入 $S(n)$ 的 Taylor 展开式，即得命题的结论。

更一般地，关于求底数为等差数列的 m 次幂的和，有下述定理：

定理 2　设 a、b 为常数，m 和 n 为正整数，则和数 $\sum_{p=1}^{n}(a+bp)^m=S'(0)\cdot n+S''(0)\frac{n^2}{2!}+\cdots+S^{(m+1)}(0)\frac{n^{m+1}}{(m+1)!}$，其中 $S^{(m+1)}(0)=A_m^m b^m$，

$$S^{(m-i)}(0)=A_m^{m-i-1}b^{m-i-1}(a+bi)^{i+1}-[\frac{1}{2!}S^{(m-i+1)}(0)+\frac{1}{3!}S^{(m-i+2)}(0)+\cdots+\frac{1}{(i+2)!}S^{(m+1)}(0)]\quad(i=0,1,2,\cdots,m-1)。$$

证明　仿照定理 1 的证法易得，这里从略。

在定理 2 中，取 $a=0$，$b=1$ 即为定理 1 的情形，由此可知，定理 1 是定理 2 的特殊情形，定理 2 是定理 1 的推广。

关于底数为数列 $(a+b)^k,(a+2b)^k,\cdots,(a+nb)^k$ 的 m 次幂的和，由幂的运算法则及定理 2 易证下面的推论：

推论 1　设 a、b 为常数，k、m 均为非零整数，且 k、m 同号，n 为正整数，则 $\sum_{p=1}^{n}[(a+bp)^k]^m=S'(0)n+S''(0)\frac{n^2}{2!}+\cdots+S^{(km+1)}(0)\frac{n^{km+1}}{(km+1)!}$，其中 $S^{(km+1)}(0)=A_{km}^{km}b^{km}$，$S^{(km-i)}(0)=A_{km}^{km-i-1}b^{km-i-1}\times(a+b)^{i+1}-[\frac{1}{2!}S^{(km-i+1)}(0)+\frac{1}{3!}S^{(km-i+2)}(0)+\cdots+\frac{1}{(i+2)!}S^{(km+1)}(0)]$　$(i=0,1,2,\cdots。km-1)$。

在推论 1 中，令 $a=0$，$b=1$ 即得下面的推论：

推论 2　设 k、m 均为非零整数，且 k、m 同号，n 为正整数，则 $\sum_{p=1}^{n}(pk)^m=S'(0)\cdot n+S''(0)\frac{n^2}{2!}+\cdots+S^{(km+1)}(0)\frac{n^{km+1}}{(km+1)!}$，其中 $S^{(km+1)}(0)=A_{km}^{km}$，$S^{(km-i)}(0)=A_{km}^{km-i-1}-[\frac{1}{2!}S^{(km-i+1)}(0)+\frac{1}{3!}S^{(km-i+2)}(0)+\cdots+\frac{1}{(i+2)!}S^{(km+1)}(0)]$，$(i=0,1,2,\cdots,km-1)$。

利用定理 1 和定理 2，我们能求有限项交错级数 $\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}p^m$ 以及 $\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}(a+bp)^m$（$a$、$b$ 为常数，m 和 n 为正整数）的和。

对于有限项交错级数的求和，下面分两种情形讨论：

(1)　当 n 为奇数时，$\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}(a+bp)^m=$

$$[(a+b)^m+(a+3b)^m+\cdots+(a+nb)^m]-\{(a+2b)^m+(a+4b)^m+\cdots+[a+(n-1)b^m]\}$$

$$=\sum_{p=1}^{n}(a+bp)^m-2\sum_{p=1}^{\frac{n-1}{2}}(a+2bp)^m$$

$$=\sum_{p=1}^{n}(a+bp)^m-2^{m+1}\sum_{p=1}^{\frac{n-1}{2}}(\frac{a}{2}+bp)^m。$$

特别地 $\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}p^m=\sum_{p=1}^{n}p^m-2^{m+1}\sum_{p=1}^{\frac{n-1}{2}}p^m$。

(2)　当 n 为偶数时，$\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}(a+bp)^m=$

$$\{(a+b)^m+(a+3b)^m+\cdots+[a+(n-1)b]^m\}-[(a+2b)^m+(a+4b)^m+\cdots+(a+nb)^m]$$

$$=\sum_{p=1}^{n}(a+bp)^m-2\sum_{p=1}^{\frac{n}{2}}(a+2bp)^m$$

$$=\sum_{p=1}^{n}(a+bp)^m-2^{m+1}\sum_{p=1}^{\frac{n}{2}}(\frac{a}{2}+bp)^m。$$

特别地 $\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}p^m=\sum_{p=1}^{n}p^m-2^{m+1}\sum_{p=1}^{\frac{n}{2}}p^m$。

利用定理 2，我们还可以求级数 $\sum_{p=l}^{n}(a+bp)^m$（a、b 为常数，l 为任意整数，m、n 为正整数）的和，我们分如下情形讨论：

(Ⅰ)当 l 为大于 1 的整数时，$\sum_{p=l}^{n}(a+bp)^m=\sum_{p=1}^{n}(a+bp)^m-\sum_{p=1}^{l-1}(a+bp)^m$。

(Ⅱ)当 l 为零时，$\sum_{p=0}^{n}(a+bp)^m=\sum_{p=1}^{n}(a+bp)^m+a^m$。

(Ⅲ)当 l 为负整数时，$\sum_{p=l}^{n}(a+bp)^m=\sum_{p=1}^{n}(a+bp)^m+a^m+\sum_{p=l}^{-1}(a+bp)^m$。由于 $\sum_{p=l}^{-1}(a+bp)^m$ 与 p 取的字母无关，令 $p=-q$，于是 $\sum_{p=l}^{-1}(a+bp)^m=\sum_{q=1}^{-l}(a-bq)^m$。因此 $\sum_{p=l}^{n}(a+bp)^m=\sum_{p=1}^{n}(a+bp)^m+a^m+\sum_{p=1}^{-l}(a-bp)^m$。

（收稿日期　1999-10-20）