

定理 1. $\triangle ABC$ 的直线 BC 上有两点 D_1 、 D_2 ，直线 CA 上有两点 E_1 、 E_2 ，直线 AB 上有两点 F_1 、 F_2 ， AD_1 、 AD_2 互为 $\angle A$ 的等角线， BE_1 、 BE_2 互为 $\angle B$ 的等角线， CF_1 、 CF_2 互为 $\angle C$ 的等角线，且 $\frac{\angle D_1 A D_2}{\angle A} = \frac{\angle E_1 B E_2}{\angle B} = \frac{\angle F_1 C F_2}{\angle C} = k$ ，则过点 P 、 P' 、 Q 、 Q' 、 R 、 R' 的圆锥曲线称为 k 等角线圆锥曲线。

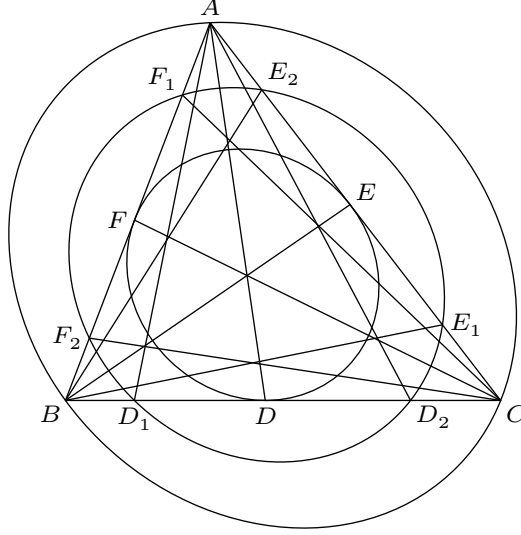


图 1

定理 2. 当 $k \neq 1$ 时 $\triangle ABC$ 的 k 等角线重心坐标方程是

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - \frac{2(1 - \cos C \cos kC)\alpha\beta}{ab(\cos kC - \cos C)} - \frac{2(1 - \cos B \cos kB)\alpha\gamma}{ac(\cos kB - \cos B)} - \frac{2(1 - \cos A \cos kA)\beta\gamma}{bc(\cos kA - \cos A)} = 0.$$

证明：如图 1，由正弦定理可得

$$BD_1 = \frac{c \sin \frac{(1-k)A}{2}}{\sin\left(\frac{(1-k)A}{2} + B\right)}, \quad BD_2 = \frac{c \sin \frac{(1+k)A}{2}}{\sin\left(\frac{(1+k)A}{2} + B\right)},$$

所以

$$BD_1 \cdot BD_2 = \frac{c^2 \sin \frac{(1-k)A}{2} \sin \frac{(1+k)A}{2}}{\sin\left(\frac{(1-k)A}{2} + B\right) \sin\left(\frac{(1+k)A}{2} + B\right)} = \frac{c^2(\cos kA - \cos A)}{\cos kA + \cos(B-C)},$$

同理可得

$$\begin{aligned} CD_1 \cdot CD_2 &= \frac{b^2(\cos kA - \cos A)}{\cos kA + \cos(B-C)}, \\ CE_1 \cdot CE_2 &= \frac{a^2(\cos kB - \cos B)}{\cos kB + \cos(A-C)}, \quad AE_1 \cdot AE_2 = \frac{c^2(\cos kB - \cos B)}{\cos kB + \cos(A-C)}, \\ AF_1 \cdot AF_2 &= \frac{b^2(\cos kC - \cos C)}{\cos kC + \cos(A-B)}, \quad BF_1 \cdot BF_2 = \frac{a^2(\cos kC - \cos C)}{\cos kC + \cos(A-B)}, \end{aligned}$$

令 $BD_1 \cdot BD_2 = tk_B$ ， $CD_1 \cdot CD_2 = tk_C$ ， $CE_1 \cdot CE_2 = uk_C$ ， $AE_1 \cdot AE_2 = uk_A$ ， $AF_1 \cdot AF_2 = vk_A$ ， $BF_1 \cdot BF_2 = vk_B$ ，则

$$t = \frac{\cos kA - \cos A}{a^2(\cos kA + \cos(B-C))}, \quad u = \frac{\cos kB - \cos B}{b^2(\cos kB + \cos(A-C))}, \quad v = \frac{\cos kC - \cos C}{c^2(\cos kC + \cos(A-B))},$$

$$k_A = b^2 c^2, \quad k_B = c^2 a^2, \quad k_C = a^2 b^2,$$

由三角形六边所在直线上的六点确定的二次曲线方程整理便可得当 $k \neq 1$ 时 $\triangle ABC$ 的 k 等角线重心坐标方程是

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - \frac{2(1 - \cos C \cos kC)\alpha\beta}{ab(\cos kC - \cos C)} - \frac{2(1 - \cos B \cos kB)\alpha\gamma}{ac(\cos kB - \cos B)} - \frac{2(1 - \cos A \cos kA)\beta\gamma}{bc(\cos kA - \cos A)} = 0. \quad \square$$

当 $k = 0$ 时点 D_1 与 D_2 、 E_1 与 E_2 、 F_1 与 F_2 分别重合成点 D 、 E 、 F ，此时圆锥曲线就变为 $\triangle ABC$ 的相切圆锥曲线，切点分别是 D 、 E 、 F ， AD 、 BE 、 CF 相交于 $\triangle ABC$ 的内心，此时圆锥曲线的重心坐标方程变为

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - \frac{2\alpha\beta}{ab} - \frac{2\alpha\gamma}{ac} - \frac{2\beta\gamma}{bc} = 0,$$

此时圆锥曲线是椭圆.

当 k 趋向 1 时,

$$\frac{2(1 - \cos C \cos kC)}{ab(\cos kC - \cos C)} : \frac{2(1 - \cos B \cos kB)}{ac(\cos kB - \cos B)} : \frac{2(1 - \cos A \cos kA)}{bc(\cos kA - \cos A)}$$

的比值趋向

$$\frac{c^2}{C} : \frac{b^2}{B} : \frac{a^2}{A},$$

此时圆锥曲线的重心坐标方程趋向于

$$\frac{c^2\alpha\beta}{C} + \frac{b^2\alpha\gamma}{B} + \frac{a^2\beta\gamma}{A} = 0,$$

这也是一个椭圆的方程，其中心的重心坐标是

$$\frac{a^2}{A} \left(-\frac{a^2}{A} + \frac{b^2}{B} + \frac{c^2}{C} \right) : \frac{b^2}{B} \left(\frac{a^2}{A} - \frac{b^2}{B} + \frac{c^2}{C} \right) : \frac{c^2}{C} \left(\frac{a^2}{A} + \frac{b^2}{B} - \frac{c^2}{C} \right),$$

我们将这个椭圆作为 $\triangle ABC$ 的 1 等角线圆锥曲线.

当 $0 \leq k \leq 1$ 时圆锥曲线是椭圆，当 $k > 1$ 是圆锥曲线不一定是椭圆.