等长点

何万程

2023 年 1 月 16 日

定义 1. 给定 $\triangle ABC$，点 A'、B'、C' 分别在直线 BC、CA、AB 上，直线 AA'、BB'、CC' 相交于同一点 P，且 $AA'=BB'=CC'$，这样的点 P 称为 $\triangle ABC$ 的等长点.

设 $\triangle ABC$ 中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$a\leqslant b$，$a\leqslant c$，$a=u+v$，$b=t+v$，$c=t+u$，面积是 S，$AA'=BB'=CC'=l$，点 P 的重心坐标是 (α,β,γ). 由 Stewart 定理得

$$AA'^2=\frac{(\beta+\gamma)(\gamma b^2+\beta c^2)-\beta\gamma a^2}{(\beta+\gamma)^2},$$
$$BB'^2=\frac{(\gamma+\alpha)(\alpha c^2+\gamma a^2)-\gamma\alpha b^2}{(\gamma+\alpha)^2},$$
$$CC'^2=\frac{(\alpha+\beta)(\beta a^2+\beta b^2)-\alpha\beta c^2}{(\alpha+\beta)^2},$$

将 $\gamma=1-\alpha-\beta$ 代入 AA'^2 和 BB'^2 的式子中，再计算，得

$$AA'^2-BB'^2=\frac{(1-\alpha-\beta)f_1(\alpha,\beta)}{(1-\alpha)^2(1-\beta)^2},\ AA'^2-CC'^2=\frac{\beta f_2(\alpha,\beta)}{(1-\alpha)^2(1-\beta)^2},$$

其中

$$\begin{aligned}f_1(\alpha,\beta)&=b^2\alpha^3+(a^2-c^2)\alpha^2\beta-(b^2-c^2)\alpha\beta^2-a^2\beta^3-(a^2+2b^2-c^2)\alpha^2\\&\quad-2(a^2-b^2)\alpha\beta+(2a^2+b^2-c^2)\beta^2+(2a^2-c^2)\alpha-(2b^2-c^2)\beta-a^2+b^2,\\f_2(\alpha,\beta)&=2b^2\alpha^3+(2a^2+3b^2-2c^2)\alpha^2\beta+(3a^2+b^2-c^2)\alpha\beta^2+a^2\beta^3+(a^2-3b^2-c^2)\alpha^2\\&\quad-2(2b^2-c^2)\alpha\beta-(a^2+b^2-c^2)\beta^2-(a^2-b^2-c^2)\alpha-(a^2-b^2)\beta,\end{aligned}$$

计算多项式 $f_1(\alpha,\beta)$ 及 $f_2(\alpha,\beta)$ 关于 β 的结式，整理得

$$-\frac{8}{3}a^8\alpha(1-\alpha)(2S^2(3\alpha-1)^4+(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)(3\alpha-1)^2-2(b^2-c^2)^2),$$

由此得

$$2S^2(3\alpha-1)^4+(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)(3\alpha-1)^2-2(b^2-c^2)^2=0,$$

令

$$p=a^4+b^4+c^4-(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2),$$

解上面的方程，可得

$$\alpha=\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}}{6S},$$

或

$$\alpha=\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)-2a^2\sqrt{p}}}{6S},$$

若 $-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)<0$ 则 $-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)-2a^2\sqrt{p}<0$，若 $-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)\geqslant 0$ 则因为

$$(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)^2-4a^4p=-16S^2(b^2-c^2)^2,$$

由此可见当 $b\neq c$ 时 $-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)-2a^2\sqrt{p}<0$；当 $b=c$ 时 $-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)-2a^2\sqrt{p}=0$，此时

$$\begin{aligned}AA'^2-BB'^2&=\frac{(3\beta-2)(3\beta-4)(9a^2\beta^2-6a^2\beta-3a^2+4b^2)}{36(1-\beta)^2},\\AA'^2-CC'^2&=\frac{3\beta(3\beta+2)(9a^2\beta^2-6a^2\beta-3a^2+4b^2)}{4(3\beta+1)^2},\end{aligned}$$

因此必定

$$9a^2\beta^2-6a^2\beta-3a^2+4b^2=0,$$

但

$$9a^2\beta^2-6a^2\beta-3a^2+4b^2=a^2(3\beta-1)^2+4(b^2-a^2),$$

所以必须 $\beta=\dfrac{1}{3}$ 且 $a=b$，即 $\triangle ABC$ 是正三角形时才成立，而当 $\triangle ABC$ 是正三角形时 $p=0$，所以 $\triangle ABC$ 非正三角形时只能

$$\alpha=\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}}{6S},$$

$\triangle ABC$ 是正三角形时

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}}{6S}\\=&\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)-2a^2\sqrt{p}}}{6S}\\=&\frac{1}{3},\end{aligned}$$

所以无论那种情况，取

$$\alpha=\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}}{6S}$$

即可．类似的方法可求得

$$\begin{aligned}\beta&=\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}}{6S},\\\gamma&=\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{-(2c^4-c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2)+2c^2\sqrt{p}}}{6S}.\end{aligned}$$

经计算可知

$$\begin{aligned}&(-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p})(-(2c^4-c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2)+2c^2\sqrt{p})\\=&(b^4+c^4-a^2(b^2+c^2)+(a^2-b^2-c^2)\sqrt{p})^2,\end{aligned}$$

且

$$((b^4+c^4-a^2(b^2+c^2))^2-(a^2-b^2-c^2)^2p=16S^2(b^2-a^2)(c^2-a^2)\geqslant 0,$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\left(\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}+\sqrt{-(2c^4-c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2)+2c^2\sqrt{p}}\right)^2\\
&=-2a^4+3a^2(b^2+c^2)-3b^4+2b^2c^2-3c^4+2(b^2+c^2)\sqrt{p}\\
&\quad+2\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}\cdot\sqrt{-(2c^4-c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2)+2c^2\sqrt{p}}\\
&=-2a^4+3a^2(b^2+c^2)-3b^4+2b^2c^2-3c^4+2(b^2+c^2)\sqrt{p}\\
&\quad+2(b^4+c^4-a^2(b^2+c^2)+(a^2-b^2-c^2)\sqrt{p})\\
&=-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p},
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}\\
&=\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}+\sqrt{-(2c^4-c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2)+2c^2\sqrt{p}},
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\alpha&=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}}{6S},\\
\beta&=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}}{6S},\\
\gamma&=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{-(2c^4-c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2)+2c^2\sqrt{p}}}{6S}
\end{aligned}
$$

或

$$
\begin{aligned}
\alpha&=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}}{6S},\\
\beta&=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}}{6S},\\
\gamma&=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{-(2c^4-c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2)+2c^2\sqrt{p}}}{6S}.
\end{aligned}
$$

以下不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$，$a\leqslant c\leqslant b$ 类似讨论即得结果.

用类似上面的方法，可得

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}\cdot\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}\\
&=-a^4-b^4+c^2(a^2+b^2)+(a^2+b^2-c^2)\sqrt{p},\\
&\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}\cdot\sqrt{-(2c^4-c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2)+2c^2\sqrt{p}}\\
&=-a^4-c^4+b^2(a^2+c^2)+(a^2-b^2+c^2)\sqrt{p},\\
&\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}\cdot\sqrt{-(2c^4-c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2)+2c^2\sqrt{p}}\\
&=b^4+c^4-a^2(b^2+c^2)-(a^2-b^2-c^2)\sqrt{p}.
\end{aligned}
$$

因为

$$
l^2=AA'^2=\frac{(\beta+\gamma)(\gamma b^2+\beta c^2)-\beta\gamma a^2}{(\beta+\gamma)^2}=\left(\frac{\beta}{\beta+\gamma}\right)^2a^2-\frac{\beta}{\beta+\gamma}(a^2-b^2+c^2)+b^2,
$$

下面求 $\dfrac{\beta}{\beta+\gamma}$ 的值. 因为 $\beta+\gamma=1-\alpha$，所以

$$\frac{\beta}{\beta+\gamma}=\frac{\beta}{1-\alpha}.$$

若

$$\begin{aligned}
\alpha&=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}}{6S},\\
\beta&=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}}{6S},\\
\gamma&=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{-(2c^4-c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2)+2c^2\sqrt{p}}}{6S},
\end{aligned}$$

则

$$\frac{\beta}{1-\alpha}=\frac{2S+\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}}{4S+\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}},$$

经计算得

$$\begin{aligned}
&\left(4S+\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}\right)\\
&\cdot\left(4S-\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}\right)\\
&\cdot(a^2+b^2+c^2+2\sqrt{p})\\
=&\,48a^2S^2,
\end{aligned}$$

再计算得

$$\begin{aligned}
&2\left(2S+\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}\right)\\
&\cdot\left(4S-\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}\right)\\
=&\,16S^2-4S\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}\\
&+8S\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}\\
&-2\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}\cdot\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}\\
=&\,16S^2-4S\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}\\
&+8S\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}\\
&-2(-a^4-b^4+c^2(a^2+b^2)+(a^2+b^2-c^2)\sqrt{p})\\
=&\,(a^2+b^2-c^2)(a^2+b^2+c^2-2\sqrt{p})\\
&+8S\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}\\
&-4S\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}},
\end{aligned}$$

再计算得

$$(a^2+b^2-c^2)(a^2+b^2+c^2-2\sqrt{p})\cdot(a^2+b^2+c^2+2\sqrt{p})=48S^2(a^2+b^2-c^2),$$

再计算得

$$\left(-\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}+2\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= -6a^4 - 9b^4 - 5c^4 + 5a^2b^2 + 9a^2c^2 + 6b^2c^2 + (2a^2 + 8b^2)\sqrt{p} \\
&\quad - 4\sqrt{-(2a^4 - a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2) + 2a^2\sqrt{p}} \cdot \sqrt{-(2b^4 - b^2(c^2 + a^2) + (c^2 - a^2)^2) + 2b^2\sqrt{p}} \\
&= -6a^4 - 9b^4 - 5c^4 + 5a^2b^2 + 9a^2c^2 + 6b^2c^2 + (2a^2 + 8b^2)\sqrt{p} \\
&\quad - 4(-a^4 - b^4 + c^2(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2 - c^2)\sqrt{p}) \\
&= -2a^4 - 5b^4 - 5c^4 + 5a^2b^2 + 5a^2c^2 + 2b^2c^2 - (2a^2 - 4b^2 - 4c^2)\sqrt{p},
\end{aligned}
$$

再计算得

$$
\begin{aligned}
&(-2a^4 - 5b^4 - 5c^4 + 5a^2b^2 + 5a^2c^2 + 2b^2c^2 - (2a^2 - 4b^2 - 4c^2)\sqrt{p}) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{p})^2 \\
&= 144S^2(2a^4 - a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2 + 2a^2\sqrt{p}),
\end{aligned}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
&4(-(2b^4 - b^2(c^2 + a^2) + (c^2 - a^2)^2) + 2b^2\sqrt{p}) - (-(2a^4 - a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2) + 2a^2\sqrt{p}) \\
&= (8b^2 - 2a^2)\sqrt{p} - 2a^4 - 7b^4 - 3c^4 + 3a^2b^2 + 7a^2c^2 + 2b^2c^2, \\
&(8b^2 - 2a^2)^2 p - (2a^4 - 7b^4 - 3c^4 + 3a^2b^2 + 7a^2c^2 + 2b^2c^2)^2 \\
&= 48S^2(5b^2 + 3c^2 - 8a^2) \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\left(-\sqrt{-(2a^4 - a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2) + 2a^2\sqrt{p}} + 2\sqrt{-(2b^4 - b^2(c^2 + a^2) + (c^2 - a^2)^2) + 2b^2\sqrt{p}}\right) \\
&\cdot (a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{p}) \\
&= 12S\sqrt{2a^4 - a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2 + 2a^2\sqrt{p}},
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&2\left(2S + \sqrt{-(2b^4 - b^2(c^2 + a^2) + (c^2 - a^2)^2) + 2b^2\sqrt{p}}\right) \\
&\cdot \left(4S - \sqrt{-(2a^4 - a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2) + 2a^2\sqrt{p}}\right) \\
&\cdot (a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{p}) \\
&= 48S^2(a^2 + b^2 - c^2) + 4S \cdot 12S\sqrt{2a^4 - a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2 + 2a^2\sqrt{p}} \\
&= 48S^2\left(a^2 + b^2 - c^2 + \sqrt{2a^4 - a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2 + 2a^2\sqrt{p}}\right),
\end{aligned}
$$

所以

$$
\frac{\beta}{\beta + \gamma} = \frac{\beta}{1 - \alpha} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + \sqrt{2a^4 - a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2 + 2a^2\sqrt{p}}}{2a^2},
$$

由此得

$$
l^2 = \left(\frac{\beta}{\beta + \gamma}\right)^2 a^2 - \frac{\beta}{\beta + \gamma}(a^2 - b^2 + c^2) + b^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{p}}{4},
$$

即

$$
l = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{p}}}{2}.
$$

用类似的计算方法，若

$$
\alpha = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{-(2a^4 - a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2) + 2a^2\sqrt{p}}}{6S},
$$

$$\beta=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}}{6S},$$
$$\gamma=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{-(2c^4-c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2)+2c^2\sqrt{p}}}{6S},$$

则

$$\frac{\beta}{\beta+\gamma}=\frac{a^2+b^2-c^2-\sqrt{2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2+2a^2\sqrt{p}}}{2a^2},$$

同样得到

$$l=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2+2\sqrt{p}}}{2}.$$

定义 2. l 称为 $\triangle ABC$ 等长点的长度.

设 $\triangle ABC$ 的两个等长点分别是 P_1、P_2，其中心坐标分别是 $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$、$(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$，不妨设

$$\alpha_1=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}}{6S},$$
$$\beta_1=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}}{6S},$$
$$\gamma_1=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{-(2c^4-c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2)+2c^2\sqrt{p}}}{6S},$$
$$\alpha_2=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}}{6S},$$
$$\beta_2=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}}{6S},$$
$$\gamma_2=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{-(2c^4-c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2)+2c^2\sqrt{p}}}{6S}.$$

则

$$\begin{aligned}
P_1P_2^2=&-(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)c^2-(\alpha_1-\alpha_2)(\gamma_1-\gamma_2)b^2-(\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2)a^2\\
=&\frac{c^2\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}\cdot\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}}{9S^2}\\
&+\frac{b^2\sqrt{-(2a^4-a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2)+2a^2\sqrt{p}}\cdot\sqrt{-(2c^4-c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2)+2c^2\sqrt{p}}}{9S^2}\\
&-\frac{a^2\sqrt{-(2b^4-b^2(c^2+a^2)+(c^2-a^2)^2)+2b^2\sqrt{p}}\cdot\sqrt{-(2c^4-c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2)+2c^2\sqrt{p}}}{9S^2}\\
=&\frac{c^2(-a^4-b^4+c^2(a^2+b^2)+(a^2+b^2-c^2)\sqrt{p})}{9S^2}\\
&+\frac{b^2(-a^4-c^4+b^2(a^2+c^2)+(a^2-b^2+c^2)\sqrt{p})}{9S^2}\\
&-\frac{a^2(b^4+c^4-a^2(b^2+c^2)-(a^2-b^2-c^2)\sqrt{p})}{9S^2}\\
=&\frac{16}{9}\sqrt{p},
\end{aligned}$$

所以

$$P_1P_2=\frac{4}{3}\sqrt[4]{p}.$$

由此可得

定理 1. $\triangle ABC$ 的等长点一般有两个，其等长点长度是

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2+2\sqrt{a^4+b^4+c^4-(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}}}{2},$$

两等长点的距离是

$$\frac{4}{3}\sqrt[4]{a^4+b^4+c^4-(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}.$$