1995年6月　　武当学刊（自然科学版）　　Jun.,1995
第15卷 第2期　　Journal of WuDang (Natural Sciences)　　Vol.15 No.2

超越几何级数的敛散性再讨论

张 鸣*

（数学系）

〔摘要〕本文不用高斯判别法和无穷乘积理论而借助于一个简单的不等式较简捷地讨论了超越几何级数的敛散性，并给出了几项应用。

关键词　级数，超越几何级数，收敛，发散。

形如

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_{n+1}^{\infty}\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma\cdot(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^{n}$$

的幂级数称为超越几何级数，其中参数α、β、γ不取零和负整数。由达朗贝尔判别法容易知道，级数在$|x|<1$时绝对收敛，在$|x|>1$时发散。至于临界点$x=\pm1$的情形则较为复杂，经典的数学分析专著例如〔1〕对此有详细讨论，其中用到高斯判别法和无穷乘积的有关结论。一般的分析教科书对此并不加以讨论，甚至二项式级数在临界点的性态也不讨论（二项式级数实际上是一类较特殊的超越几何级数）。在这篇短文中，我们从一个简单的不等式出发来讨论超越几何级数的敛散性，并不用到高斯判别法和无穷乘积，同时讨论一下与此相关的一些问题，它们既可以作为现行教材的一种补充，又可以成为习题课的内容。

（一）$F(\alpha,\beta,\gamma,\pm1)$的敛散性

引理1　如果实数$x>-1$，$x\neq0$，则有不等式

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x \qquad (1)$$

证：对函数$\ln t$在区间〔1，$1+x$〕上用拉格朗日中值定理即可。

推论1　如果实数λ不取零和负整数，整数$m>|\lambda|$，则有

$$\frac{\lambda}{\lambda+m}<\ln\left(1+\frac{\lambda}{m}\right)<\frac{\lambda}{m} \qquad (2)$$

证：在（1）中取$x=\frac{\lambda}{m}$。

推论2　如果整数m，n满足$n\geqslant m>1$，则有

$$\ln\left(\frac{n}{m}\right)<\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{K}<\ln\left(\frac{n}{m-1}\right) \qquad (3)$$

证：在（2）中取$\lambda=1$，由（2）的右端有

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}>\sum^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln n-\ln m=\ln\left(\frac{n}{m}\right)$$

同理由（2）的左端有

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}<\sum_{k=m}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right)=\ln n-\ln(m-1)=\ln\left(\frac{n}{m-1}\right)$$

引理2 如果实数λ不取零和负整数，定义

$$u_n(\lambda)=\frac{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1)}{n!}$$

$n=1,2,3,\cdots$。则存在只与λ有关的正实数$m(\lambda)$，$M(\lambda)$使得$n>|\lambda|+1$时有

$$\frac{m(\lambda)}{n^{1-\lambda}}<|u_n(\lambda)|<\frac{M(\lambda)}{n^{1-\lambda}} \qquad (4)$$

证．约定$k=|[\lambda]|$，$[\lambda]$表示不超过λ的最大整数。记

$$c(\lambda)=\frac{1}{k!}\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k)$$

$$P_n(\lambda)=\left(1+\frac{\lambda}{k+1}\right)\left(1+\frac{\lambda}{k+2}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda}{n-1}\right)$$

则$n>|\lambda|+1$时

$$|u_n(\lambda)|=|c(\lambda)|P_n(\lambda)\frac{1}{n}$$

由不等式（2）可得

$$\lambda\sum_{m=k+1}^{n-1}\frac{1}{m+\lambda}<\ln P_n(\lambda)<\lambda\sum_{m=k+1}^{n-1}\frac{1}{m} \qquad (5)$$

令 $$\alpha_n=\sum_{m=k+1}^{n-1}\frac{1}{m+\lambda}$$

$$\beta_n=\sum_{m=k+1}^{n-1}\frac{1}{m}$$

由不等式（3）的左端得

$$\alpha_n,\ \beta_n>\sum_{m=k+1}^{n-1}\frac{1}{m+k+1}>\ln\left(\frac{n+k}{2k+2}\right)>\ln\left(\frac{n}{2k+2}\right)$$

由不等式（3）的右端又得

$$\alpha_n,\ \beta_n<\sum_{m=k+1}^{n-1}\frac{1}{m-k}<1+\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m}<1+\ln n$$

注意到 $k>|\lambda|+1$，$1=\ln e<\ln(2|\lambda|+4)$ 因此有

$$\ln[(2|\lambda|+4)^{-1}n]<\alpha_n,\ \beta_n<\ln[(2|\lambda|+4)n] \quad (6)$$

（5）式可写成

$$\lambda\alpha_n<\ln p_n(\lambda)<\lambda\beta_n$$

如果 $\lambda>0$，由（σ）可推出

$$(2|\lambda|+4)^{-\lambda}n^{\lambda}<p_n(\lambda)<(2|\lambda|+4)^{\lambda}n^{\lambda}$$

如果 $\lambda<0$，由（σ）又得

$$(2|\lambda|+4)^{\lambda}n^{\lambda}<p_n(\lambda)<(2|\lambda|+4)^{-\lambda}n^{\lambda}$$

这样总有

$$(2|\lambda|+4)^{-|\lambda|}n^{\lambda}<p_n(\lambda)<(2|\lambda|+4)^{|\lambda|}n^{\lambda}$$

取
$$m(\lambda)=|c(\lambda)|(2|\lambda|+4)^{-|\lambda|}$$
$$M(\lambda)=|c(\lambda)|(2|\lambda|+4)^{|\lambda|}$$

就有

$$\frac{m(\lambda)}{n^{1-\lambda}}<|u_n(\lambda)|<\frac{M(\lambda)}{n^{1-\lambda}} \quad n>|\lambda|+1$$

下面是主要结论

定理 对于超越几何级数$F(\alpha,\beta,\gamma,\pm1)$，记 $\mu=\gamma-(\alpha+\beta)$，则

（1） $F(\alpha,\beta,\gamma,1)$在$\mu>0$时收敛，$\mu\leqslant0$时发散。

（2） $F(\alpha,\beta,\gamma,-1)$在$\mu>0$时绝对收敛，在$-1<\mu\leqslant0$时条件收敛，在$\mu\leqslant-1$时发散。

证、引用引理2中的记号有

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(\lambda)\ u_n(\beta)}{u_n(\gamma)}$$

命
$$a_n=\frac{u_n(\alpha)\ u_n(\beta)}{u_n(\gamma)} \qquad n=1,2,3\cdots$$

设整数 $N>\max(|\alpha|,|\beta|,|\gamma|)+1$ 则$n\geqslant N$时有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(n+1)}>0$$

因此 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_n$是同号级数。由引理2中的（4）式

$$\frac{m(\alpha)m(\beta)}{M(\gamma)}\frac{1}{n^{1+\mu}}<|a_n|<\frac{M(\alpha)M(\beta)}{m(\gamma)}\frac{1}{n^{1+\mu}} \quad (7)$$

这表明级数 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}|a_n|$ 与级数 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}n^{-(1+\mu)}$ 同敛散，于是定理中结论（1）得征。

另一方面

$$F(\alpha,\beta,\gamma,-1)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

由（7）可知它在 $\mu>0$ 时绝对收敛，$\mu\leqslant-1$ 时发散（一般项不趋于零）。设 $-1<\mu\leqslant0$。注意 $n\geqslant N$ 时 a_n 不变号，因此级数

$$\sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n a_n$$

是交错级数。由（7）可知 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，如果证明了数列 $\{|a_n|, n\geqslant N\}$ 从某项起单调减少，则由莱布尼兹判别法就可断言级数收敛。设 $n\geqslant N$，此时

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}&=\frac{a_{n+1}}{a_n}\\&=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(n+1)}\\&=1-\frac{1+\mu}{n+1}+\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{\gamma+n}\cdot\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

显然有正整数 $N_0\geqslant N$，当 $n\geqslant N_0$ 时

$$\left|\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{\gamma+n}\right|<\frac{1}{2}(1+\mu)$$

因此 $n\geqslant N_0$ 时

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}&<1-\frac{1+\mu}{n+1}+\frac{1+\mu}{2(n+1)}\\&=1-\frac{1+\mu}{2(n+1)}\\&<1\end{aligned}$$

这就证明了 $\{|a_n|, n\geqslant N_0\}$ 单调减少。

由（7）式可以看出 $-1<\mu\leqslant0$ 时级数

$$\sum_{n=N}^{\infty}|a_n|$$

发散，因此原级数条件收敛。定理中结论（2）得证。

（二）一些相关问题

前面提供的方法可以用来判别一类无穷级数的敛散性，有的由定理的结论推出，有的则直接用引理2的估计式（4），但均不涉及较精细的判别法，例如拉贝判别法和高斯判别法，也不用无穷乘积的有关结果。下面的问题可在〔2〕、〔3〕、〔4〕中查到，处理的方式则完全不同。

问题1 设实数 λ不取零和负整数，记 $(\lambda)_0=1$

$$(\lambda)_n=\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1) \qquad (n\geqslant 1)$$

广义超越几何级数定义为

$$ {}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_q; x)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n\cdots(\alpha_p)_n}{n!\,(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n\cdots(\gamma_q)_n}x^n$$

如果$p=2$，$q=1$则就是超越几何级数。限于篇幅，只讨论$p=q+1$时级数在临界点$x=\pm 1$的敛散性。设一般项为a_n，引用引理2的记号，当n充分大时有估计式

$$\frac{m}{n^{1+\mu}}<|a_n|<\frac{M}{n^{1+\mu}}$$

这里

$$m=\frac{m(\alpha_1)m(\alpha_2)\cdots m(\alpha_p)}{M(\gamma_1)M(\gamma_2)\cdots M(\gamma_q)}$$

$$M=\frac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)\cdots M(\alpha_p)}{m(\gamma_1)m(\gamma_2)\cdots m(\gamma_q)}$$

$$\mu=\sum_{k=1}^{q}\gamma_k-\sum_{s=1}^{p}\alpha_s$$

因此，当$x=1$时，若$\mu>0$级数收敛，$\mu\leqslant 0$则级数发散；当$x=-1$时，若$\mu>0$级数绝对收敛，若$\mu\leqslant -1$则级数发散，而$-1<\mu\leqslant 0$时级数条件收敛。

问题2 二项式级数

$$(1+x)^\lambda=1+\lambda x+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2+\cdots$$

在临界点$x=\pm 1$处的敛散性，此处λ不取零和正整数。这个级数实际上是一类特殊的超越几何级数

$$(1+x)^\lambda=F(-\lambda, \beta, \beta, -x)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-\lambda)_n}{n!} x^n$$

由（一）的定理可以得到如下结果：

$x=-1$ 时，若 $\lambda>0$ 级数收敛；若 $\lambda<0$ 则级数发散。

$x=1$ 时，若 $\lambda>0$ 级数绝对收敛；若 $-1<\lambda<0$ 级数条件收敛；若 $\lambda\leqslant-1$ 则级数发散。

问题3　讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$ 的敛散性。

取 $\lambda=-\frac{1}{2}$

$$\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p = \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right]^p$$

$$= \left[\frac{1}{n!}(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n)\right]^p$$

$$= \left[\frac{\lambda+n}{\lambda}u_n(\lambda)\right]^p$$

这里 $u_n(\lambda)$ 的定义同引理2。由引理2有估计式

$$\frac{m(\lambda)}{n^{1-\lambda}} < |Un(\lambda)| < \frac{M(\lambda)}{n^{1-\lambda}}$$

不难算出

$$m(\lambda)=m\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4\sqrt{5}}$$

$$M(\lambda)=M\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{5}$$

注意　$n\geqslant2$ 时　$n<\left|\frac{\lambda+n}{\lambda}\right|<2n$，因此

$$\left(\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^p \frac{1}{n^{-\lambda p}} < \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p < \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^p \frac{1}{n^{-\lambda p}}$$

由此得到

（1）$-\lambda P>1$ 即 $p>2$ 时级数收敛；

（2）$-\lambda P\leqslant1$ 即 $p\leqslant2$ 时级数发散。

对于 $p=2$，即使用较细致的拉贝判别法也得不出任何结果（参见〔4〕）。

问题4　讨论级数

$$\frac{a}{b}+\frac{a(a+d)}{b(b+d)}+\frac{a(a+b)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\cdots$$

的敛散性，此处a，b，c都是正实数。

这个级数是超越几何级数

$$F\left(\frac{a}{d},\ 1,\ \frac{b}{d},\ 1\right)$$

取 $\mu=\frac{b}{d}-\left(\frac{a}{d}+1\right)$，由（一）中定理可知$b-a>d$时级数收敛，$b-a\leqslant d$时级数发散。

下面的问题也是较典型的，用引理2中关于$u_n(\lambda)$的估计式就可解决，在此不详细讨论。

问题5　讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}\ (p>0,\ q>0)$$ 的敛散性。

问题6　讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}\ (p>0,\ q>0)$$ 的敛散性。

问题7　讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p\cdot\frac{1}{n^q}$ 的敛散性。

问题8　讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$ 的敛散性。

顺便指出，分析中的一些初等函数，它们的幂级数展开式就是超越几何级数，例如，除前面提到的函数$(1+x)^{\lambda}$外，还有

$$\arcsin x=xF\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ x^2\right)$$

$$\operatorname{arctg} x=xF\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ -x^2\right)$$

$$\ln(1+x)=xF(1,\ 1,\ 2,\ -x)$$

等等，它们在临界点（收敛区间端点）的性态都可由（一）中的定理推出。

参考文献

〔1〕Г·М·菲赫金哥尔茨《微积分学教程》第二卷第一分册；人民教育出版社 1980

〔2〕王竹溪　郭敦仁《特殊函数概论》科学出版社1979

〔3〕吉米多维奇《数学分析习题集》，人民教育出版社1979

〔4〕华东师范大学数学系编《数学分析》下册高等教育出版社1980