高等代数教学点滴体会

周 立 仁
(数学系)

高等代数是师专数学专业一门重要的基础课,它是中学代数的继续和提高。然而由于这等课程概念多,定理多,证明多,便构成了高等代数抽象,逻辑性较强的特点。学过高代的学生相当普遍的反映是:概念述语抽象难记;思想方法掌握不易;解题论证入手困难,这个问题多年来引起代数教师所关注,本人对此谈点体会。

1、了解学生实际,有的放矢教学

教师只有了解学生的实际知识水平,才能做到有的放矢,从而收到好的效果,课后学生常说,课的内容能听懂,但应用知识去寻找解题的途径和论证方法思路不广。学生其所以会感到如此,主要原因是:其一,学生没有注意高代与中学数学的如下差异:①高等代数内容抽象,形式化程度更高。如向量空间脱离了几何中的平面,立体,而论及一般的n维向量空间。②思维水平要求更高,极少靠直观。直观只能作为一般论证的参考,整个体系建立在严谨的逻辑体系之上,字字句句含意确切严格,论证步步有依据。③学生长期在中学形成的思维定式(认为代数就是演算)及学习习惯(只注重结果,不注重论证)已不再适应,传统的中学数学教学以知识记忆为主,以计算技能为主,多数学生下课后忙于做习题,很少逐字逐句推敲课文,只记住一些定理的结论,而不能复述定理证明的思路梗概和方法。而大学知识获得以理解为先导,注重分析理解和逻辑推理能力的培养,因此学生适应这一学习有一个过程。其二是教师在处理论证题时对学生的诱导不够。为此在讲解概念时,着重揭示其含义,理解其实质,如两个多项式的最大公因式文[1]中是这样定义的:"设d(x)是f(x)与g(x)的一个公因式若是d(x)能被f(x)与g(x)的每一个公因式整除,,那么d(x)叫做f(x)与g(x)的一个最大公因式,剖析这一概念,揭示最大公因式d(x)的含义是指1°,$d(x)|f(x)$,$d(x)|g(x)$;2°,若有$h|(x)f(x)$,$h(x)|g(x)$,则$h(x)d(x)$。这样不仅使学生正确理解了这一概念,更有助于运用这一概念证题。

2、联系中学实际,激发学习兴趣

在高等代数的教学中,必须使学生掌握基本的,系统的代数知识和代数方法,以加深对中学数学的理解,要特别注重联系中学实际,居高临下,从而提高学生学习该课程的自觉性,激发学习兴趣,如多项式代数与中学的代数式,方程,因式分解等联系较紧,但中学重在方法讨论,高等代数重在理论研究,实例少。因此注意理论与方法相结合,即讲论证时,必须联系解题方法,讲解题时又必须联想到课堂上的定理证明。在文[1]中讲"多项式函数,多项式的根"的一节中,将多项式的根与因式分解联系起来,讨论如何分解因式:

例:分解因式(1),$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)$;(2)$(x+y)(y+z)(z+z)+xyz$。

略解如下:(1)因$x=-y$,$x=-z$,$y=-z$均为多项式的根,所以$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=m(x+y)(x+z)(y+z)$,用待定系数法得$m=3$,即$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y)(x+z)(y+z)$。

(2),因$(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$为三次齐式且是对称形式的,$z=-(x+y)$为多项式的一个根,故$(x+y)(y+z)(z+x)+xyz=(x+y+z)(xy+yz+zx)$。

又如在文[1]中讲授"有理数域上多项式"一节,将Eisenstein判别法与证明一类为无理数等问题联系起来。

例:(1)设$p_1,p_2,\cdots p_t$为t个互异的素数,$n>1$,求证$\sqrt[n]{p_1,p_2,\cdots p_t}$是无理数。

(2)求证$\sqrt[n]{\frac{3}{2}}$($n>1$)为无理数。

证明参看文[2](P73)。

因式分解与无理数证明等是中学生在中学数学中较难做的题型,用高代知识得到较易解决,使学生增强了解题能力,激发了学习兴趣,这些活生生的实例,排除了少数学生"当一个中学数学教师,学高代有何用"的疑难。这样适当地扩充学生的中学数学知识是必要的,也是有益的。

3 借助直观分析,注重逻辑推理

高等代数抽象,逻辑性强,论证多,给教学带来一定困难,为了使学生较好地掌握抽象内容,熟悉本课程的基本观点和方法,特别要注重训练学生的逻辑推理能力。首先要抓住证明中的分析环节,剖析证明的关键和来由,充分使用直观模型助于理解抽象结论。

例如在欧氏空间中证明定理:设$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m\}$是欧氏空间V的一组线性无关的向量,那么可以求出V的一个正交组$\{\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_m\}$使得$\beta_k$可以由$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots a_k\}$线性表示,$k=1,2\cdots m$。

着重剖析证明"关键"的由来,即:

"假设$1<k\leqslant m$,而满足定理要求的$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_{k-1}$都已作出,取$\beta_k=\alpha_k-\frac{\langle\alpha_k,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1\cdots\cdots-\frac{\langle\alpha_k,\beta_{k-1}\rangle}{\langle\beta_{k-1},\beta_{k-1}\rangle}\beta_{k-1}$"…①(见文[1])

在证明时,学生感兴趣的是想知道怎样想出①的,若这个问题知道了,定理的证明学生可看书而得之,所以在证明前必作如下分析:

若$\{\alpha_1,\alpha_2\}$为二维几何空间V_2的一个基,且不正交,求V_2的一介正交基$\{\beta_1,\beta_2\}$,且β_k可由$a_k\cdots a_k$线性表示。

取$\beta_1=\alpha_1$,作$\beta_2\perp\alpha_1$,如图1便得$\beta_2=\alpha_2+a\beta_1$,$a\in R$,因$\beta_2$与$\beta_1$正交,所以$\langle\alpha_2+a\beta_1,\beta_1\rangle=\langle\alpha_2,\beta_1\rangle+a\langle\beta_1\beta_1\rangle=0$,所以$a=-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}$,$\Rightarrow\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_{1},\beta_1\rangle}\beta_1$。

对于三维空间同样可分析得出类似的式子,从而学生通过二维与三维空间的直观模型加深了对①由来的理解,而掌握定理的证明。

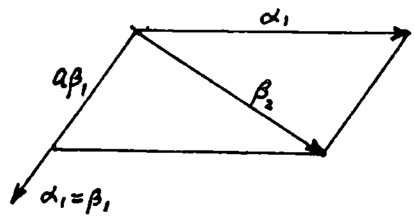


图 1

4 加强习题训练,提高解题能力

高代习题教学是高代教学的重要组成部分,它在加深学生对于数学新概念的理解,培养推理分析能力,开阔学生思路和提高解题技能技巧起着重要的作用。

4.1、紧扣条件,顺藤摸瓜

数学问题是因到果的内容组成的,从因推出果,是学生掌握打开解题大门的钥匙,所以在解剖数学问题中,紧扣条件,顺藤摸瓜是训练学生提高解题能力最基本的途径,学生常感到定理,概念能看懂,用不上,因此在习题教学过程中应注重引导学生审题,怎样分析,证明求解,适当采用讨论式,如有这样一个题,"设δ是n维欧氏空间V的一个正交变换,证明,如果V的一个子空间W在δ之下不变,那么W的正交补$W^\perp$也在δ之下不变"学生都是这样分析的:要证$W^\perp$也在δ这下不变"。即证$\forall\ \xi\in W^\perp$,有$\delta(\xi)W^\perp$,为了要证$\delta(\xi)\in W^\perp$,需证$\forall\ \eta\in w$,有$\langle\delta(\eta),\eta\rangle=0$,但是学生难证,$\langle\delta(\xi),\eta\rangle=0$,其中$\delta$是一个正交变换之个条件用不上,V的维数为n也用不上,于是可引导学生继续紧扣这两个条件来证明$\langle\delta(\xi),\eta\rangle=0$,向学生分析,要能在W中找到一个向量$\alpha$,使得$\delta(\alpha)=\eta$,于是$\langle\delta(\eta)=\langle\delta(\xi),\delta(\eta)\rangle=\langle\delta,\xi\rangle=0$,问题就解决,但如何在W中找到$\eta$呢?再引导学生抓住V是n维的进行联想,因V是维的,所以$V=W\oplus W^\perp$,从而可设V的一个标准正交基$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s,\alpha_{s+1}\cdots\alpha_n$,使得$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$均属于W,$\alpha_{s+1},\cdots\alpha_n$均属于$W^\perp$但$\delta$是一个正交变换,那么$\delta(\alpha_1)\delta(\alpha_2)\cdots\delta(\alpha_s)$仍是w的一个标准正交基且$\delta(\alpha_{s+1})\delta(\alpha_{s+2})\cdots\delta(\alpha_n)$是$W^\perp$的一个标准正交基,∴对$\forall\ \eta\in W$,则g可由$\delta(\alpha_1)\cdots\delta(\alpha_s)$线性表示,于是$y=k_1\delta(\alpha_1)+\cdots+k_s\delta(\alpha_s)=\delta(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s)$,∴可令$\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s\in W$,则$\delta(\alpha)=\eta\in W$,且$\langle\delta(\xi),\eta\rangle=\langle\xi,\alpha\rangle=0$∴$\delta(\xi)\in W^\perp$,故$W^\perp$在$\delta$之下不变。

4.2、观察题型,分类解题

把一些数学题分类,使学生有规可循,这是提高学生解题能力的一种有效方法,如讲解行列式的计算时,因行列式的性质与计算方法较多,学生在解题时,不知用哪一种方法适合,若方法选择不适,往往会造成解题困难,甚至难以计算出来,使学生失去解题的信心。而行列式的计算归结为14种方法:(1)降阶法,(2)升阶法,(3)用余式定

理.(4)化为范德蒙行列式.(5)作高阶差分.(6)拆为行列式的和.(7)拆为行列式的积.(8)乘以已知行列式.(9)递推法.(10)递推方程组方法.(11)利用线性方程组的解.(12)消去法求三角形行列式的值.(13)母函数法.(14)看作另一个行列式的导数或积分。

例如计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$

由 D_n 的构造学生想用范德蒙行列式计算.但是用不上.因此行列式与范德蒙行列式有差别.通过讲完上述 14 种方法后.很多学生用不同的简便方法计算出来了.兹举两种方法如下。

解法一:利用线性方程组的解的方法计算。D_n 与范德蒙行列式

$$H_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

的比值可以看作线性方程① $\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3+\cdots+a_1^{n1}x_n=a_1^n \\ \cdots\cdots \\ x_1+a_nx_2+a_n^2x_3+\cdots+a_n^{n-1}x_n=a_n^n \end{cases}$ 的解 x_n.如解出 x_n 乘以 H_n,即得 D_n.

但①又可看作 n 次多项式方程 $t^n-x_nt^{n-1}-x_{n-1}t^{n-2}\cdots-x_2t-x_1=0\cdots(2)$(t 是未知数.$x_1.x_2\cdots x_n$ 看作系数)有 n 个根 $a_1.a_2.\cdots a_n$.用根与系数的关系即得 $x_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$。故 $D_n=X_nH_n=(a_1+a_2\cdots+a_n)\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$

解法二 升阶法.考虑 n+1 阶范德蒙行列式

$$g(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & x \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} & x^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} & x^{n-1} \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n & x^n \end{vmatrix}=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

从上式左端看.多项式 g(x)的 x^{n-1} 的系数为 $(-1)^{2n+1}D_n=-D_n$.但从上式右端看 x^{n-1} 的系数为 $-(a_1+a_2+\cdots+a_n)\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$.二者应相等.故 $D_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$.类似于此题.如 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & \cdots & a_n^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$ 学生便会计算了。

4·3 一题多解(证),开拓思路

选一些题多解(证).可以开拓学生的思想.发展学生的智力.提高解题能力.同时也说明在同一条件下运用不同的思想与知识就有不同的解法.其结果相同.这就是"殊途同归"。

4·4,掌握方法,灵活运用。

数学中有些常用的方法:反证法.归纳法.综合法.分析法.待定系数法.换元法.配方法等主要方法.在解题中.使学生选取恰当的方法.也是提高学生解题能力的途径之一。 (下转 61 页)

螺钉,将一平面镜垂直置于载物台上,并使其垂直于 a、b 的连线。使望远镜正对平面镜后分别调节望远镜倾度和勒物台下的螺钉 a 或 b,用渐近法各自调节一半,使平面镜反射回来的亮叉丝象能与分划板上方的十字叉丝重合,则望远镜的光轴垂直于反射的镜面。然后将载物台连同平面镜相对望远镜旋转 180°,同样调节望远镜倾度和载物台下的螺钉,使另一镜面与望远镜光轴垂直。渐近法就是多次重复上述步骤,直到任一镜面反射回来的亮叉丝的象均能与分划板上方的十字叉丝完全重合时,望远镜的光轴则不单垂直于任一镜面,且垂直于仪器主轴了。

再让平面镜旋转 90° 平行于 a、b 调节载物台下的螺钉 c 使镜面垂直于望镜的光轴,这样载物台台面就垂直于仪器主轴了。

学生调分光计费时,就在于没有从调节中观察到的现象来判断出仪器所处的状态,从而决定下一步的动作。

例:当从望远镜目镜中看到反射亮十字象成象在分划板的十字线上后,把游标盘连同载物台和平面镜旋转 180° 时,亮十字象与十字丝有一垂直方向的位移,这表明望远镜的光轴虽垂直平面镜(平行于载物台台面)但不垂直于旋转主轴(如图五)。

如果,这时不用渐近法来逐步调节,而是单纯的调节望远镜的倾斜度或者只调棱镜平台的倾斜度使十字象一次到位(如图六)。这样的调节反复次数再多也是达不到目的的。

只有将望远镜倾斜度和载物台的调平螺钉各调一半,才可能使望远镜的光轴向垂直于主轴的方向进行,最终达到调好的目的。

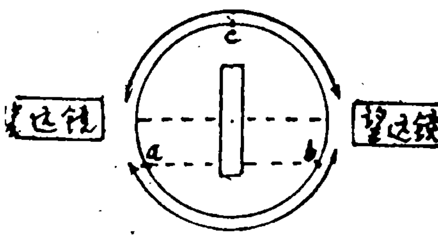
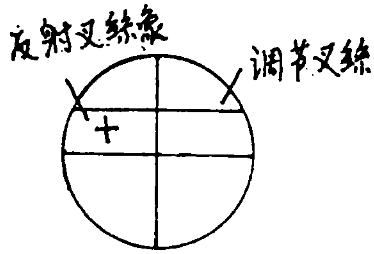


图 3



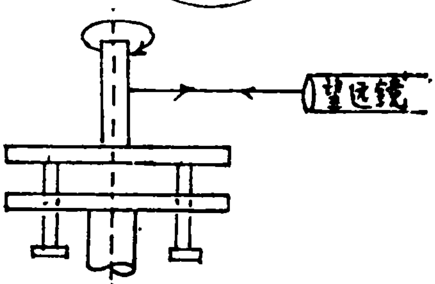


图 4

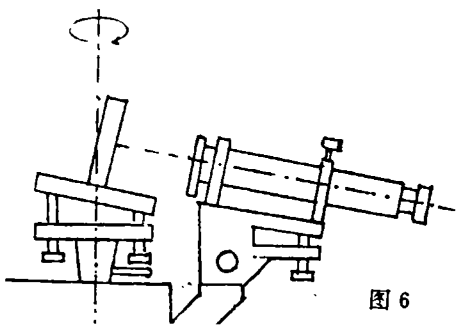


图 6

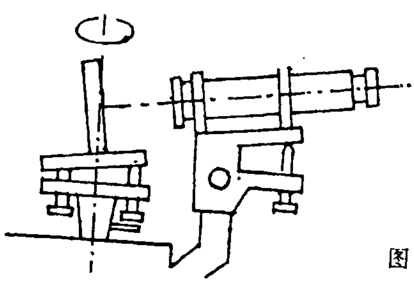
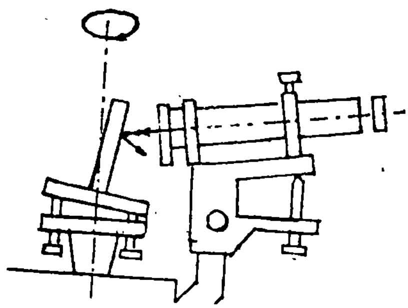


图 5



(上接 53 页)

参 考 文 献

[1] 张禾瑞,郝 新编·高等代数(第三版)·高等教育出版社·1983。

[2] 杨家骐,王卿文主编·高等代数在初等数学中的应用·济南山东教育出版社·1992。